MECHANIKA KOMPOZITNÍCH MATERIÁLŮ
PORUŠOVÁNÍ KOMPOZITŮ

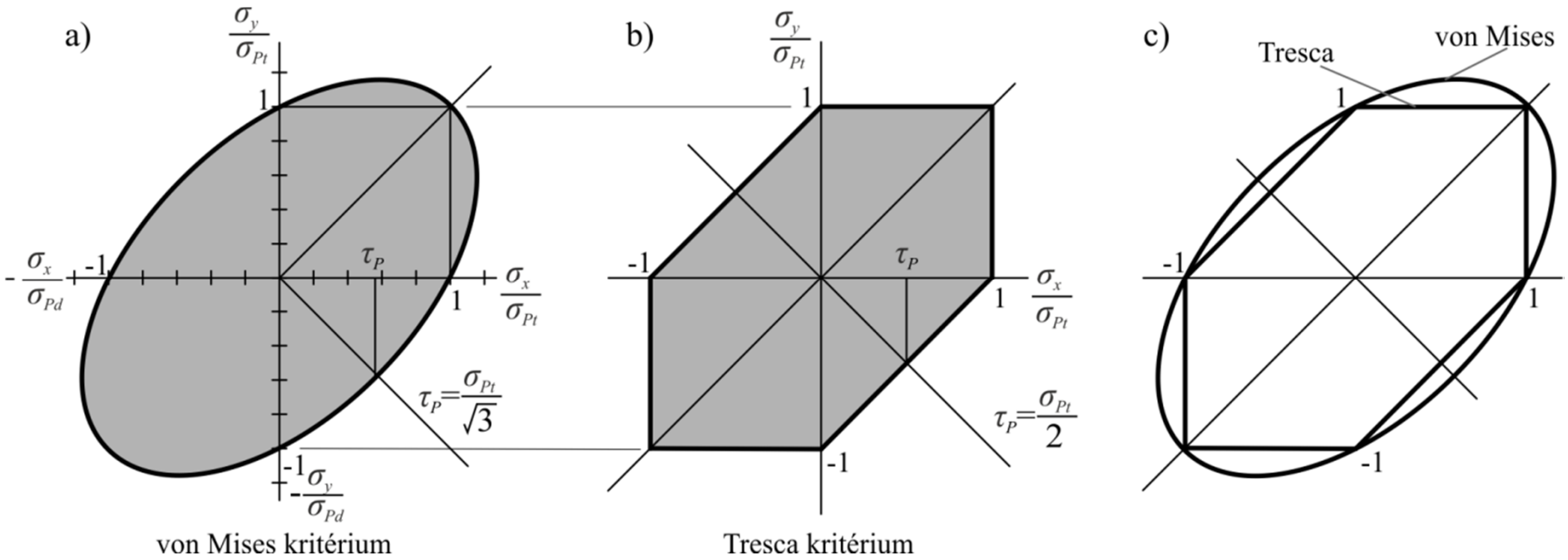
Vladislav Laš
Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
katedra mechaniky

Porušování kompozitních materiálů

- Úvod
- Lomové procesy vyvolané v jednosměrovém kompozitu - módy porušení
- Rozdělení kritérií pevnosti
- Neinteraktivní kritéria pevnosti
- Interaktivní kritéria pevnosti
- Kritéria „Direct mode”
- Srovnání některých kritérií
- Delaminace
- Metoda postupného porušování laminátu
- Závěr

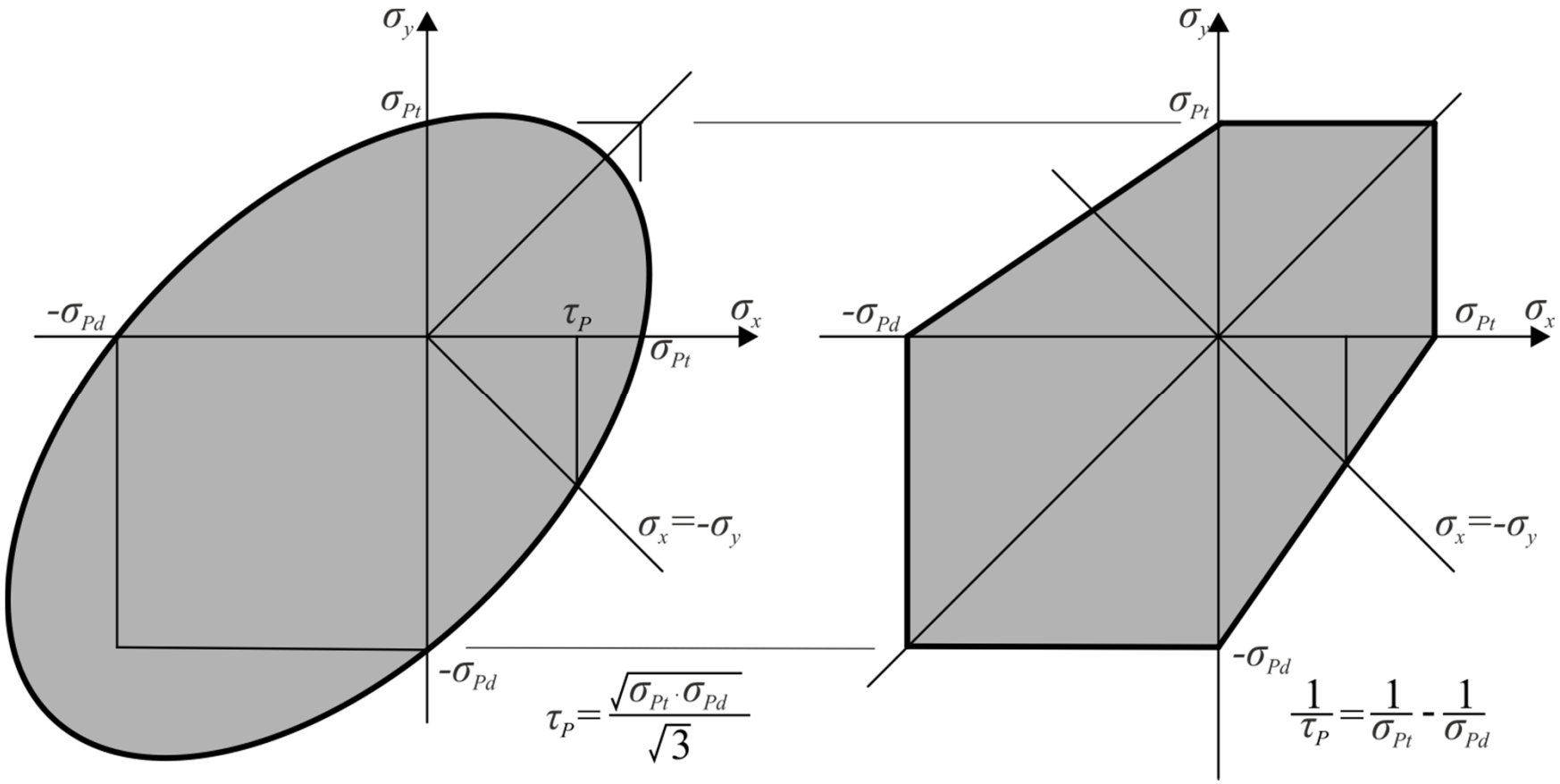
Úvod

Pro izotropní materiály



Úvod

Pro izotropní materiály – rozdílná pevnost v tahu a tlaku



Von Mises kritérium

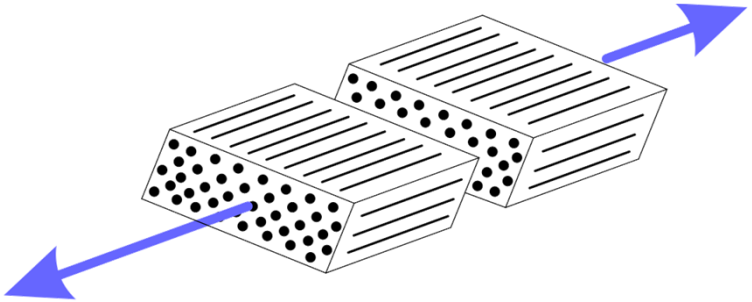
Tresca kritérium

Lomové procesy

Módy porušení dlouhovláknových kompozitů

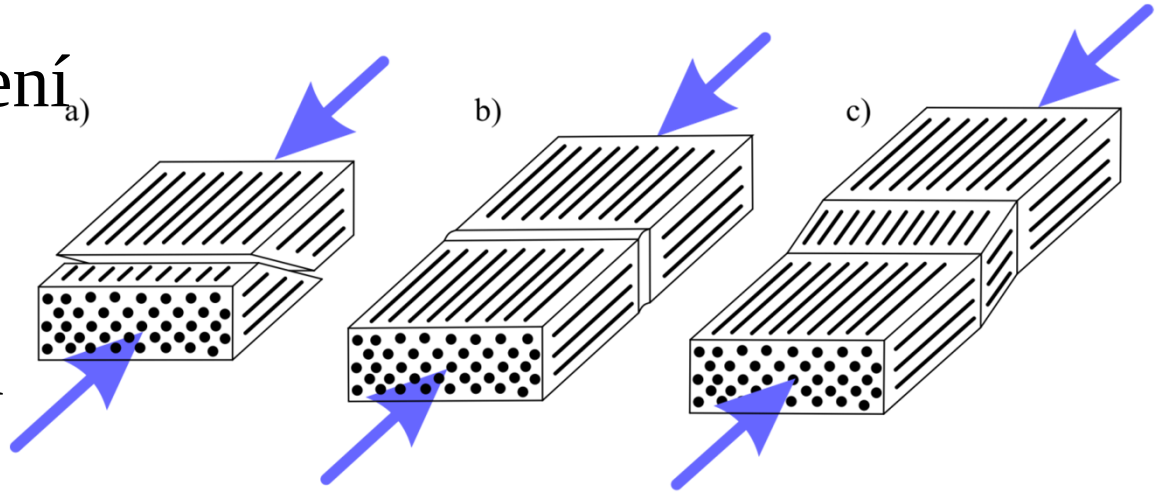
Porušení vláken

- při tahovém zatížení



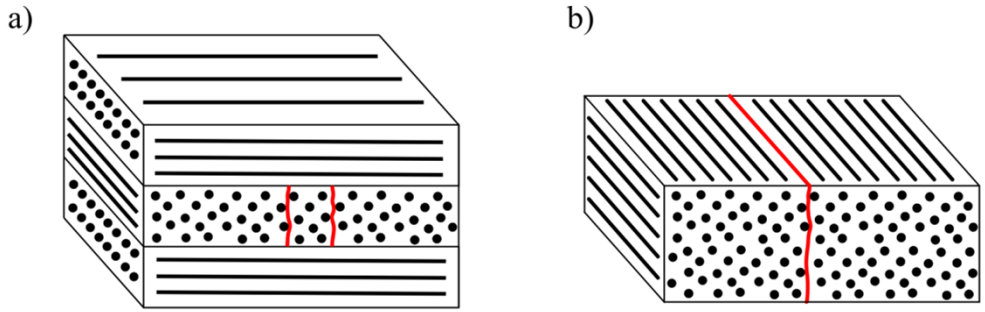
- při tlakovém zatížení

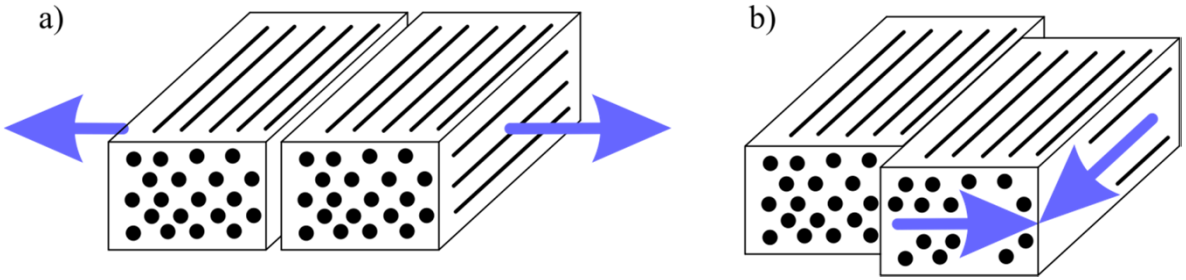
a) vlivem smyku
b) mikro zborcení
c) vybočení vláken



Lomové procesy

Mezivláknové porušení

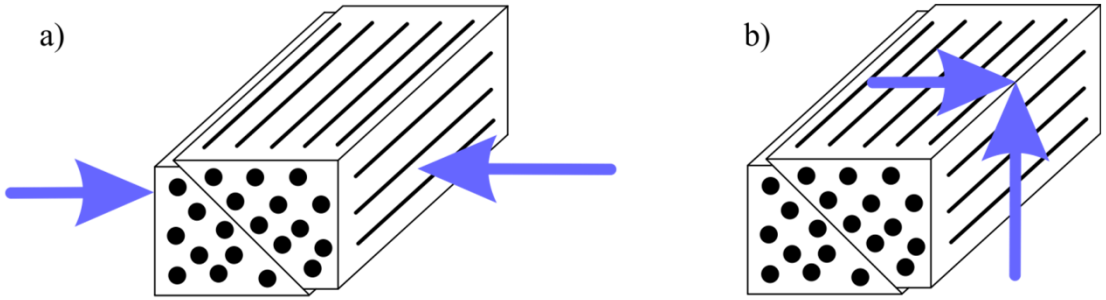




Lomové procesy

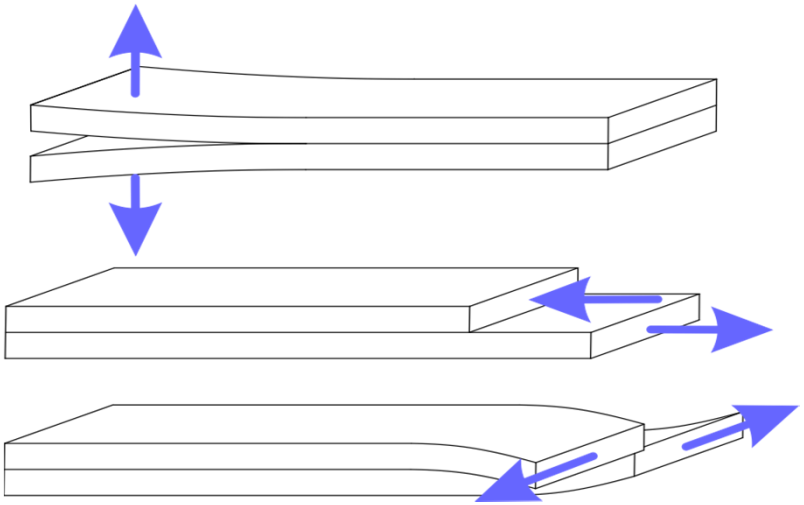
Mezi vláknové porušení při

a) příčném tlaku
b) příčném smyku



Delaminace

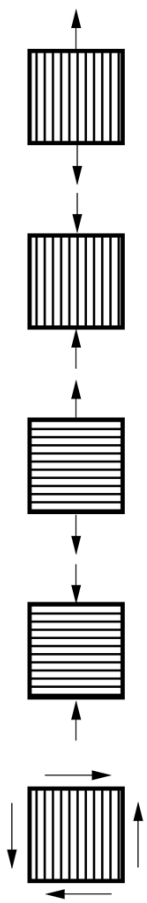
Tři módy delaminace



Lomové procesy

Makromechanická kritéria

- Lamina, rovinná napjatost
- 4 nezávislé parametry (E_L, E_T, G_{LT}, ν_{LT})
- Pevnosti v hlavních směrech
- Základní pevnostní parametry



F_{Lt} … podélná tahová pevnost

F_{Lc} … podélná tlaková pevnost

F_{Tt} … příčná tahová pevnost

F_{Tc} … příčná tlaková pevnost

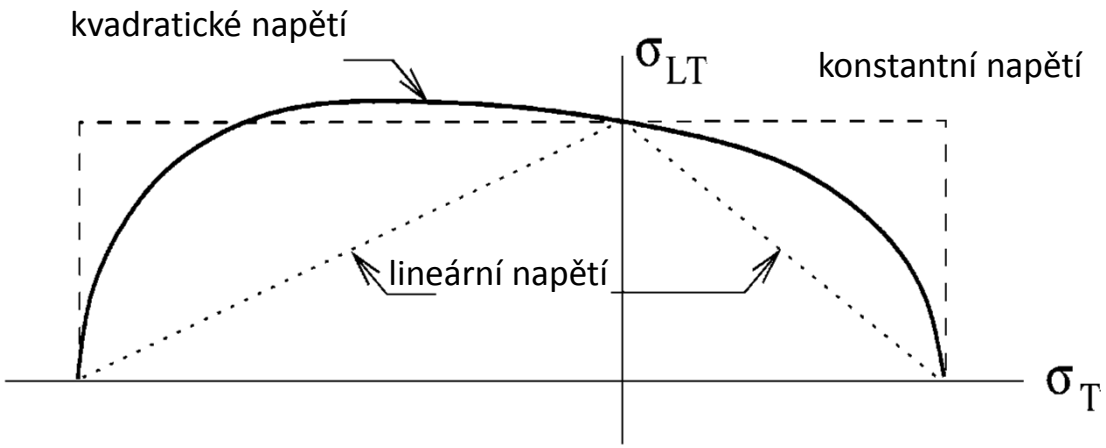
F_{LT} … smyková pevnost

Rozdělení kritérií pevnosti

Kritéria porušování

Mezní plocha v souřadnicovém systému

- napětí
- deformace



Charakter křivek

- konstantní
- lineární
- kvadratická

Rozdělení kritérií pevnosti

Rozdělení kritérií pevnosti

A) Neinteraktivní
- Kritérium maximálního napětí
- Kritérium maximální deformace

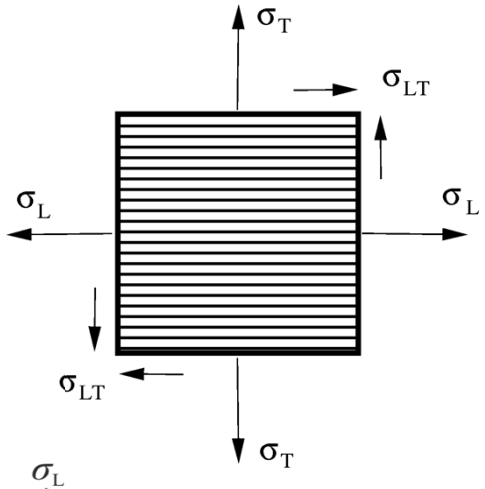
B) Interaktivní
- Hillovo kritérium pevnosti
- Tsai-Hillovo kritérium pevnosti
- Hoffmanovo kritérium pevnosti
- Tsui-Wu kritérium pevnosti

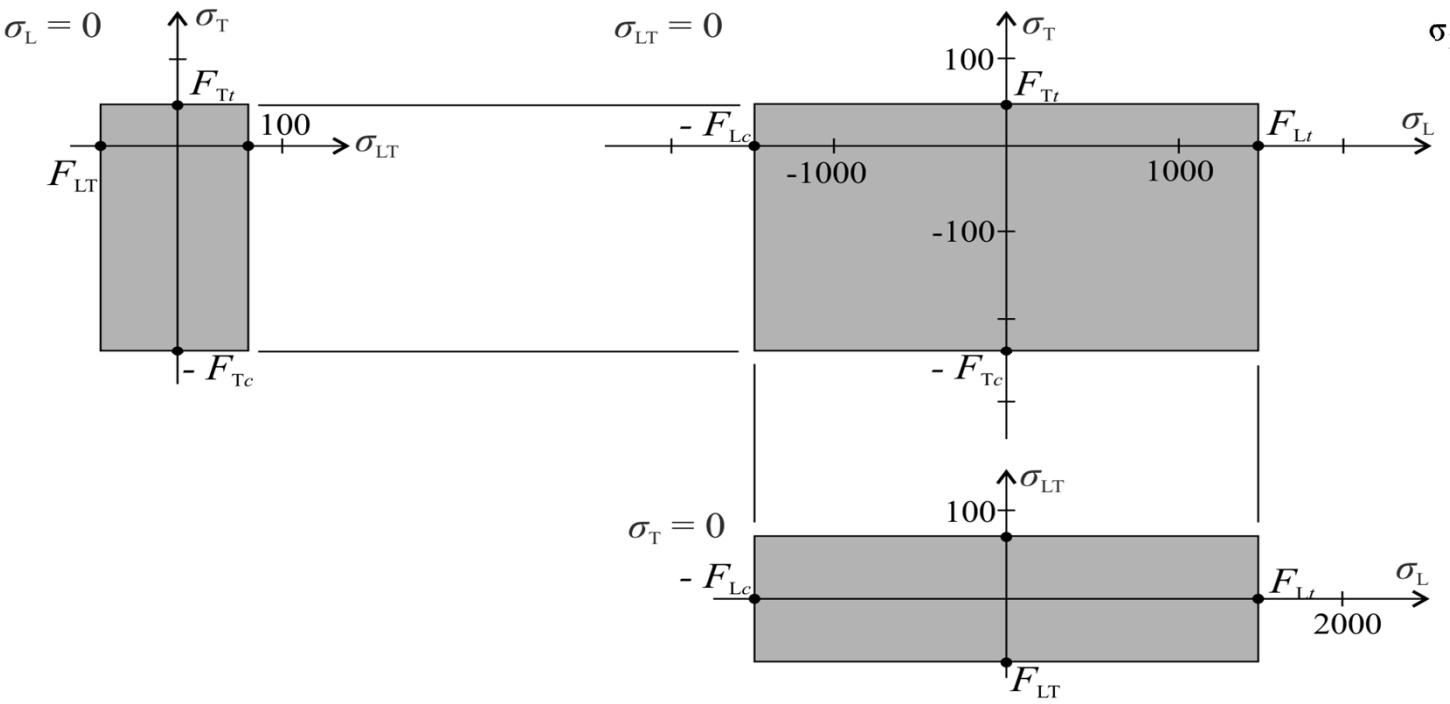
C) Direct mode
- Hashin
- Puckovo kritérium pevnosti
- LaRC

Neinteraktivní kritéria pevnosti

Kritérium maximálního napětí

$$-F_{Lc} < \sigma_L < F_{Lt} \qquad -F_{Tc} < \sigma_T < F_{Tt} \qquad -F_{LT} < \sigma_{LT} < F_{LT}$$





Neinteraktivní kritéria pevnosti

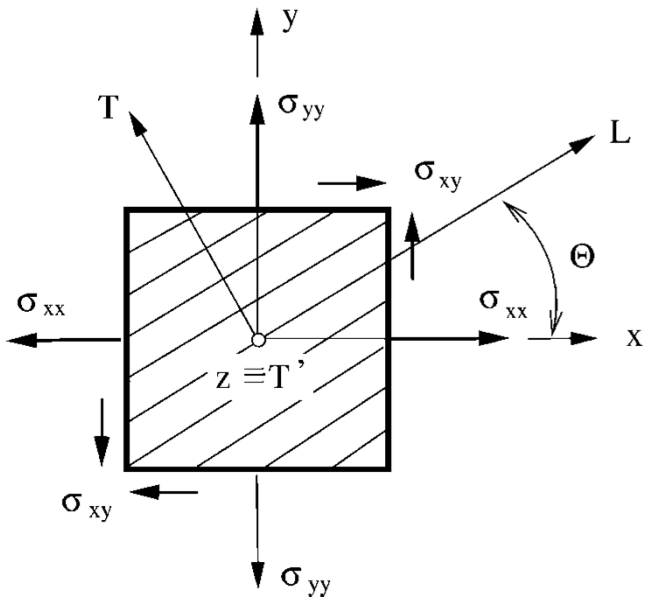
Mimoosové kritérium

Podmínky pevnosti

$$-F_{Lc} < \sigma_{xx}\cos^2\Theta + \sigma_{yy}\sin^2\Theta + 2\sigma_{xy}\sin\Theta\cos\Theta < F_{Lt}$$

$$-F_{Tc} < \sigma_{xx}\sin^2\Theta + \sigma_{yy}\cos^2\Theta - 2\sigma_{xy}\sin\Theta\cos\Theta < F_{Tt}$$

$$-F_{LT} < \left(\sigma_{yy} - \sigma_{xx}\right)\sin\Theta\cos\Theta + \sigma_{xy}\left(\cos^2\Theta - \sin^2\Theta\right) < F_{LT}$$



Neinteraktivní kritéria pevnosti

Mimoosové kritérium pro $\sigma_{xx} \neq 0$

$$\sigma_L = \sigma_{xx} \cos^2 \Theta$$

$$\sigma_T = \sigma_{xx} \sin^2 \Theta$$

$$\sigma_{LT} = -\sigma_{xx} \sin\Theta \cos\Theta$$

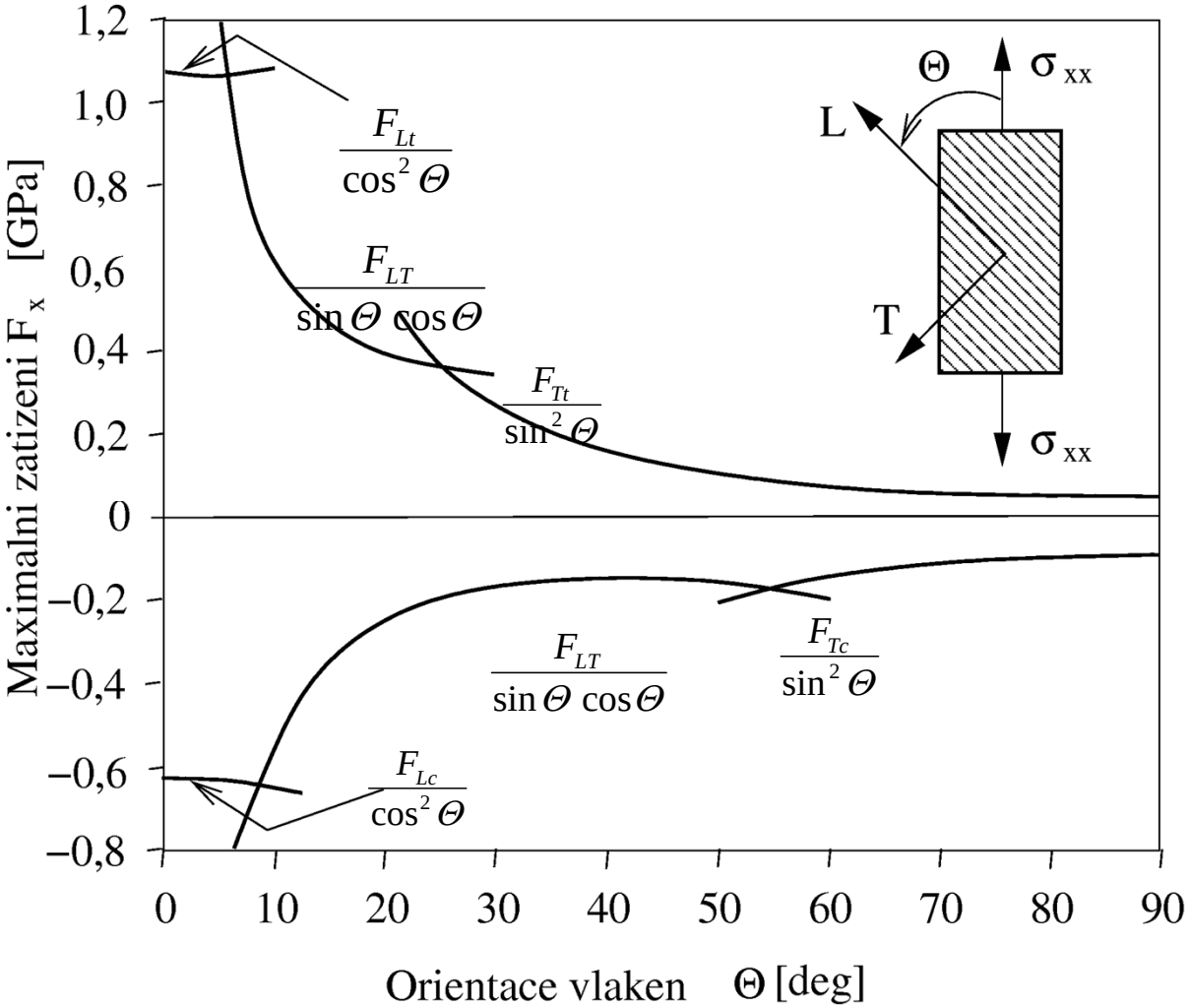
a podmínky pevnosti jsou vyjádřeny

$$-F_{Lc} < \sigma_{xx} \cos^2 \Theta < F_{Lt}$$

$$-F_{Tc} < \sigma_{xx} \sin^2 \Theta < F_{Tt}$$

$$-F_{LT} < -\sigma_{xx} \sin\Theta \cos\Theta < F_{LT}$$

Neinteraktivní kritéria pevnosti



Neinteraktivní kritéria pevnosti

Kritérium maximální deformace

- Podmínky

$$-F_{\varepsilon Lc} < \varepsilon_L < F_{\varepsilon Lt}\,, \quad -F_{\varepsilon Tc} < \varepsilon_T < F_{\varepsilon Tt}\,, \quad -F_{\varepsilon LT} < \gamma_{LT} < F_{\varepsilon LT}$$

- Hookeův zákon

$$\varepsilon_L = \frac{1}{E_L}(\sigma_L - \nu_{LT}\,\sigma_T), \qquad \varepsilon_T = \frac{1}{E_T}(\sigma_T - \nu_{TL}\sigma_L), \qquad \gamma_{LT} = \frac{\sigma_{LT}}{G_{LT}}$$

- Mezní hodnoty složek poměrné deformace

$$F_{\varepsilon Lt} = \frac{F_{Lt}}{E_L}\,, \; F_{\varepsilon Lc} = \frac{F_{Lc}}{E_L}\,, \quad F_{\varepsilon Tt} = \frac{F_{Tt}}{E_T}\,, \quad F_{\varepsilon Tc} = \frac{F_{Tc}}{E_T}\,, \quad F_{\varepsilon LT} = \frac{F_{LT}}{G_{LT}}$$

Neinteraktivní kritéria pevnosti

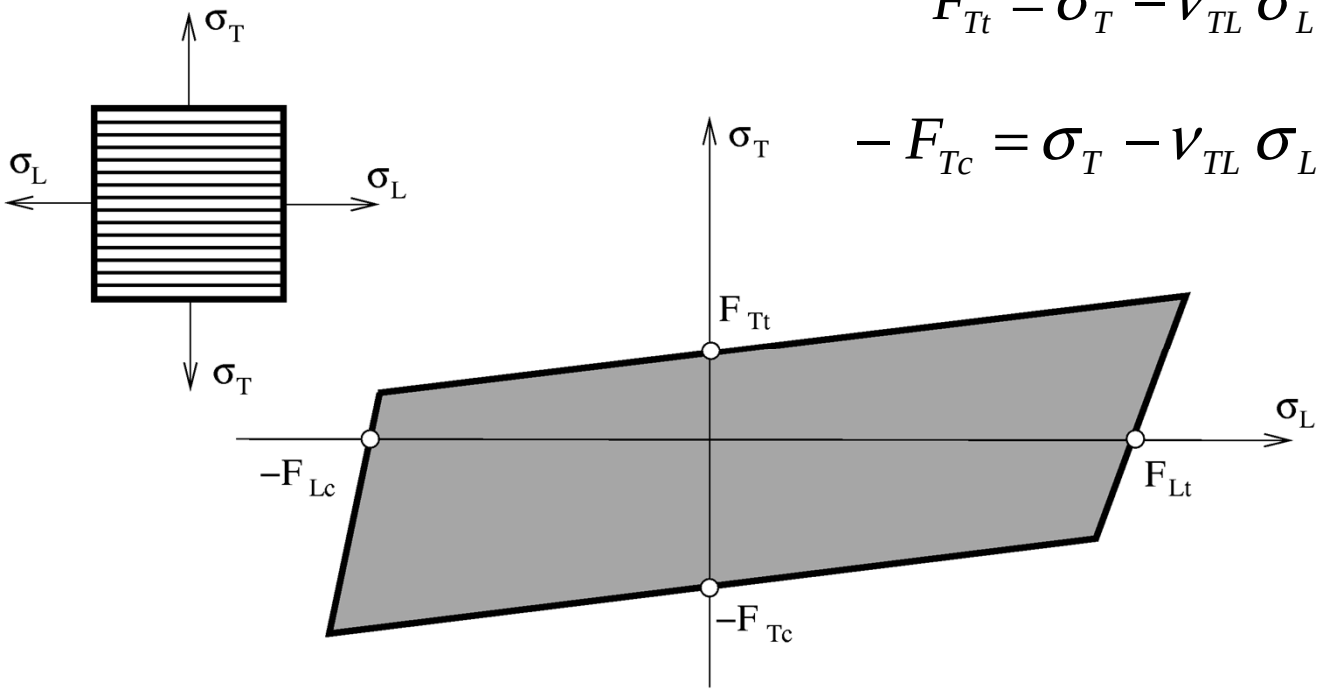
S využitím Hookeova zákona

$$F_{Lt} = \sigma_L - \nu_{LT}\,\sigma_T \quad \text{pro} \quad \varepsilon_L > 0$$

$$-F_{Lc} = \sigma_L - \nu_{LT}\,\sigma_T \quad \text{pro} \quad \varepsilon_L < 0$$

$$F_{Tt} = \sigma_T - \nu_{TL}\,\sigma_L \quad \text{pro} \quad \varepsilon_T > 0$$

$$-F_{Tc} = \sigma_T - \nu_{TL}\,\sigma_L \quad \text{pro} \quad \varepsilon_T < 0$$



Neinteraktivní kritéria pevnosti

<u>Příklad 1</u>

Použitím vztahů mezi napětími a deformacemi pro lineární elastický materiál nakreslete meznou čáru:

a) pro kritérium maximální deformace v napěťovém souřadnicovém systému

b) pro kritérium maximálního napětí v deformačním souřadnicovém systému

Pro materiál T300/5208 je dáno $F_{Lc} = -1500\,MPa,$

$$F_{Lt} = 1500\,MPa, \quad F_{Tc} = -40\,MPa, \quad F_{Tt} = 40\,MPa, \quad F_{LT} = 268\,MPa,$$

$$E_L = 1{,}8 \cdot 10^5\,MPa, \quad E_T = 0{,}103 \cdot 10^5\,MPa,$$

$$G_{LT} = 0{,}0717 \cdot 10^5\,MPa, \quad \nu_{LT} = 0{,}28, \quad \nu_{TL} = 0{,}016$$

Neinteraktivní kritéria pevnosti

Řešení: Mezní hodnoty deformací

$$F_{\varepsilon Lc} = \frac{F_{Lc}}{E_L} = -8{,}28 \cdot 10^{-3}\ , \quad F_{\varepsilon Lt} = \frac{F_{Lt}}{E_L} = 8{,}28 \cdot 10^{-3}$$

$$F_{\varepsilon Tc} = \frac{F_{Tc}}{E_T} = -3{,}88 \cdot 10^{-3}\ , \quad F_{\varepsilon Tt} = \frac{F_{Tt}}{E_T} = 3{,}88 \cdot 10^{-3}\ , \quad F_{\varepsilon LT} = \frac{F_{LT}}{E_{LT}} = 9{,}42 \cdot 10^{-3}$$

ad a) $\sigma_L \neq 0,\ \ \sigma_T = 0,$

$$F_{\varepsilon Lc} = \frac{F_{Lc}}{E_L} \Rightarrow F_{Lc} = E_L\ F_{\varepsilon Lc} = -1500\,MPa, \quad F_{\varepsilon Lt} = \frac{F_{Lt}}{E_L} \Rightarrow F_{Lt} = E_L\ F_{\varepsilon Lt} = 1500\,MPa$$

$$\sigma_L = 0,\ \ \sigma_T \neq 0,$$

$$F_{\varepsilon Tc} = \frac{F_{Tc}}{E_T} \Rightarrow F_{Tc} = E_T\ F_{\varepsilon Tc} = -40\,MPa, \quad F_{\varepsilon Tt} = \frac{F_{Tt}}{E_T} \Rightarrow F_{Tt} = E_T\ F_{\varepsilon Tt} = 40\,MPa$$

Neinteraktivní kritéria pevnosti

- Pro $F_{\varepsilon Lt} = 8{,}28 \cdot 10^{-3}$, $F_{\varepsilon Tt} = 3{,}88 \cdot 10^{-3}$ jsou mezní napětí

$$\sigma_{Lm} = \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}\,\nu_{TL}} \left(F_{\varepsilon Lt} + \nu_{TL}\, F_{\varepsilon Tt} \right) = 1517\, MPa$$

$$\sigma_{Tm} = \frac{E_T}{1 - \nu_{LT}\,\nu_{TL}} \left(F_{\varepsilon Tt} + \nu_{LT}\, F_{\varepsilon Lt} \right) = 62\, MPa$$

- Pro $F_{\varepsilon Lc} = -8{,}28 \cdot 10^{-3}$, $F_{\varepsilon Tc} = -3{,}8 \cdot 10^{-3}$ jsou mezní napětí

- Pro $\sigma_{Lm} = -1517\, MPa, \quad \sigma_{Tm} = -62\, MPa$ jsou mezní napětí

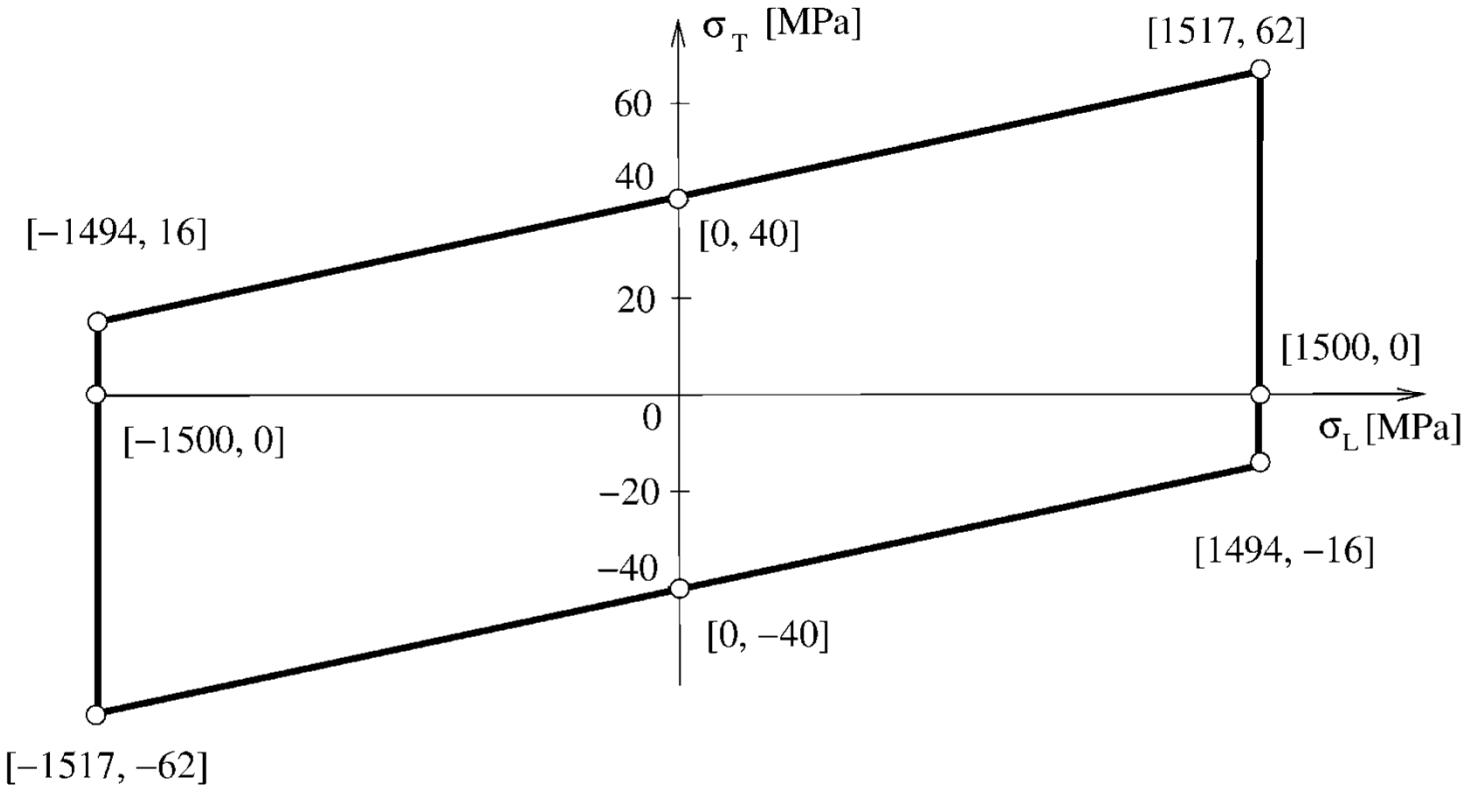
$$F_{\varepsilon Lc} = -8{,}28 \cdot 10^{-3},\ F_{\varepsilon Tt} = 3{,}8 \cdot 10^{-3}$$

$$\sigma_{Lm} = -1494\, MPa, \quad \sigma_{Tm} = 16\, MPa$$

Neinteraktivní kritéria pevnosti

- Pro $F_{\varepsilon Lt} = 8{,}28 \cdot 10^{-3}$, $F_{\varepsilon Tc} = -3{,}8 \cdot 10^{-3}$ jsou mezní napětí

$$\sigma_{Lm} = 1494\,MPa, \quad \sigma_{Tm} = -16\,MPa$$



Neinteraktivní kritéria pevnosti

ad b)

$$\sigma_L \neq 0, \;\; \sigma_T = 0,$$

$$F_{Lc} = E_L \, F_{\varepsilon Lc} \Rightarrow F_{\varepsilon Tc} = \frac{F_{Lc}}{E_L} = -8{,}28 \cdot 10^{-3}$$

$$F_{Lt} = E_L \, F_{\varepsilon Lt} \Rightarrow F_{\varepsilon Lt} = \frac{F_{Lt}}{E_L} = 8{,}28 \cdot 10^{-3}$$

$$\sigma_L = 0, \;\; \sigma_T \neq 0,$$

$$F_{Tc} = E_T \, F_{\varepsilon Tc} \Rightarrow F_{\varepsilon Tc} = \frac{F_{Tc}}{E_T} = -3{,}88 \cdot 10^{-3}$$

$$F_{Tt} = E_T \, F_{\varepsilon Tt} \Rightarrow F_{\varepsilon Tt} = \frac{F_{Tt}}{E_T} = 3{,}88 \cdot 10^{-3}$$

Neinteraktivní kritéria pevnosti

- Pro $F_{Lt} = 1500\,MPa$ a $F_{Tt} = 40\,MPa$ jsou složky mezní deformace

$$\varepsilon_{Lm} = \frac{1}{E_L} F_{Lt} - \frac{\nu_{TL}}{E_T} F_{Tt} = 8{,}226 \cdot 10^{-3}, \quad \varepsilon_{Tm} = \frac{1}{E_T} F_{Tt} - \frac{\nu_{LT}}{E_L} F_{Lt} = 1{,}563 \cdot 10^{-3}$$

- Pro $F_{LC} = -1500\,MPa,\ F_{Tc} = -40\,MPa$

$$\varepsilon_{Lm} = -8{,}226 \cdot 10^{-3}, \quad \varepsilon_{Tm} = -1{,}563 \cdot 10^{-3}$$

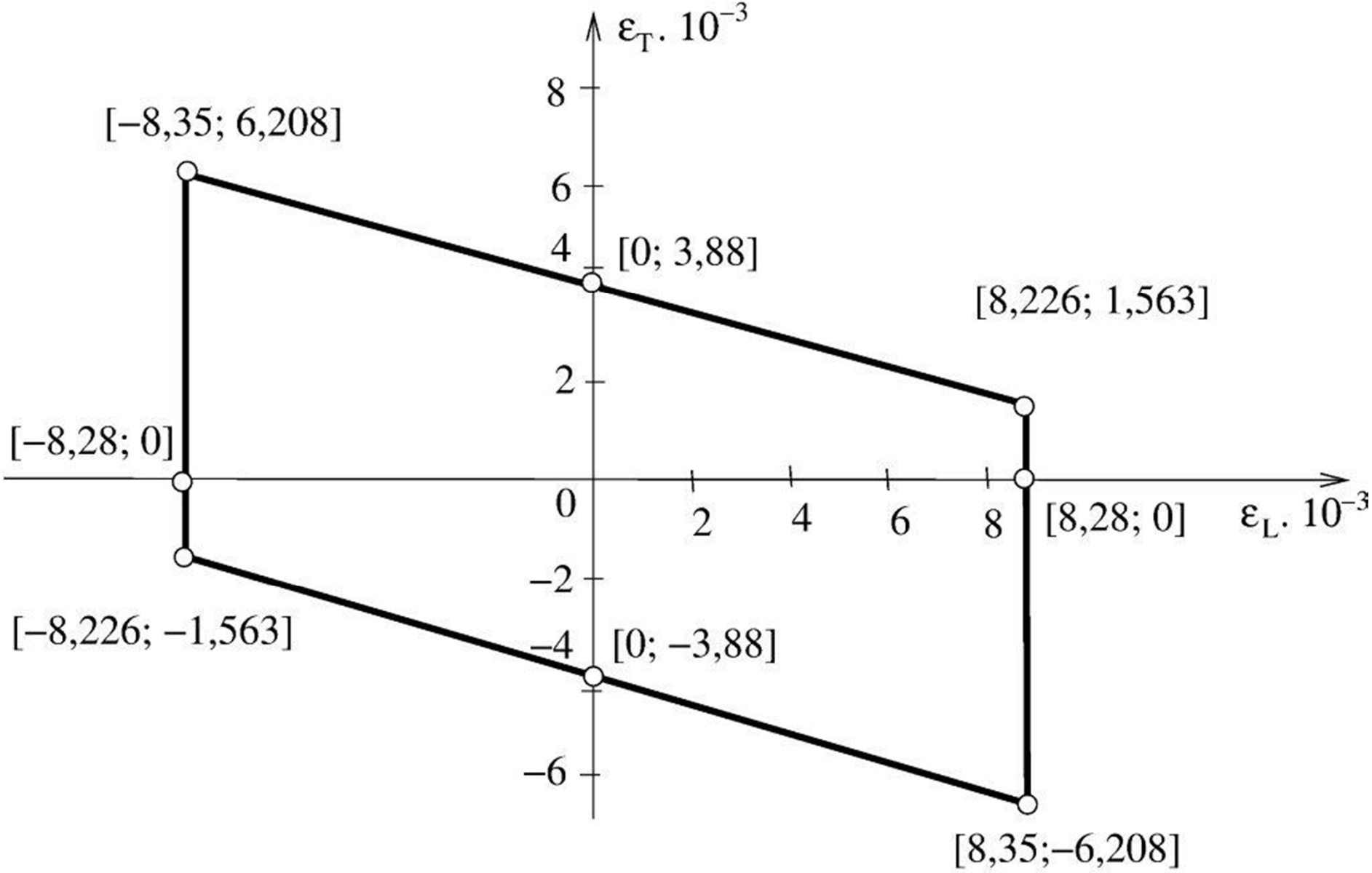
- Pro kombinaci $F_{Lc} = -1500\,MPa,\ F_{Tc} = 40\,MPa$ dostaneme

$$\varepsilon_{Lm} = -8{,}35 \cdot 10^{-3}, \quad \varepsilon_{Tm} = 6{,}208 \cdot 10^{-3}$$

- Pro kombinaci $F_{Lt} = 1500\,MPa,\ F_{Tc} = -40\,MPa$ obdržíme

$$\varepsilon_{Lm} = 8{,}35 \cdot 10^{-3}, \quad \varepsilon_{Tm} = -6{,}208 \cdot 10^{-3}$$

Neinteraktivní kritéria pevnosti



Interaktivní kritéria pevnosti

Hillovo kritérium (1950)

Vyšel z Misesovy podmínky pevnosti pro izotropní mat.

$$\frac{1}{2}\left[\left(\sigma_{xx}-\sigma_{yy}\right)^2+\left(\sigma_{yy}-\sigma_{zz}\right)^2+\left(\sigma_{zz}-\sigma_{xx}\right)^2+6\left(\sigma_{yz}^2+\sigma_{zx}^2+\sigma_{xy}^2\right)\right]\leq\sigma_k^2$$

Hill rozšířil kritérium pro ortotropní materiály

$$A\left(\sigma_T-\sigma_{T'}\right)^2+B\left(\sigma_{T'}-\sigma_L\right)^2+C\left(\sigma_L-\sigma_T\right)^2+2D\sigma_{TT'}^2+2E\sigma_{LT'}^2+2F\sigma_{LT}^2=1$$

To lze přepsat do tvaru

$$\left(B+C\right)\sigma_L^2+\left(A+C\right)\sigma_T^2+\left(A+B\right)\sigma_{T'}^2-2C\,\sigma_L\,\sigma_T-2B\,\sigma_L\,\sigma_{T'}-$$
$$-2A\sigma_T\,\sigma_{T'}+2D\,\sigma_{TT}^2+2E\,\sigma_{LT}^2+2F\,\sigma_{LT}^2=1$$

Interaktivní kritéria pevnosti

Určení parametrů $A \div F$

Koeficienty hledal pomocí 3 tahových a 3 smykových testů

Za předpokladu, že působí pouze napětí $\sigma_L = F_L$

$$B + C = \frac{1}{F_L^2}$$

pouze $\sigma_T = F_T \rightarrow A + C = \frac{1}{F_T^2}$ atd.

$$(\sigma_{T'} = \sigma_{LT'} = \sigma_{TT'} = 0)$$

Pro případ rovinné napjatosti

$$\left(\frac{\sigma_L}{F_L}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_T}{F_T}\right)^2 - \left(\frac{1}{F_L^2} + \frac{1}{F_T^2} - \frac{1}{F_{T'}^2}\right)\sigma_L \sigma_T + \left(\frac{\sigma_{LT}}{F_{LT}}\right)^2 = 1$$

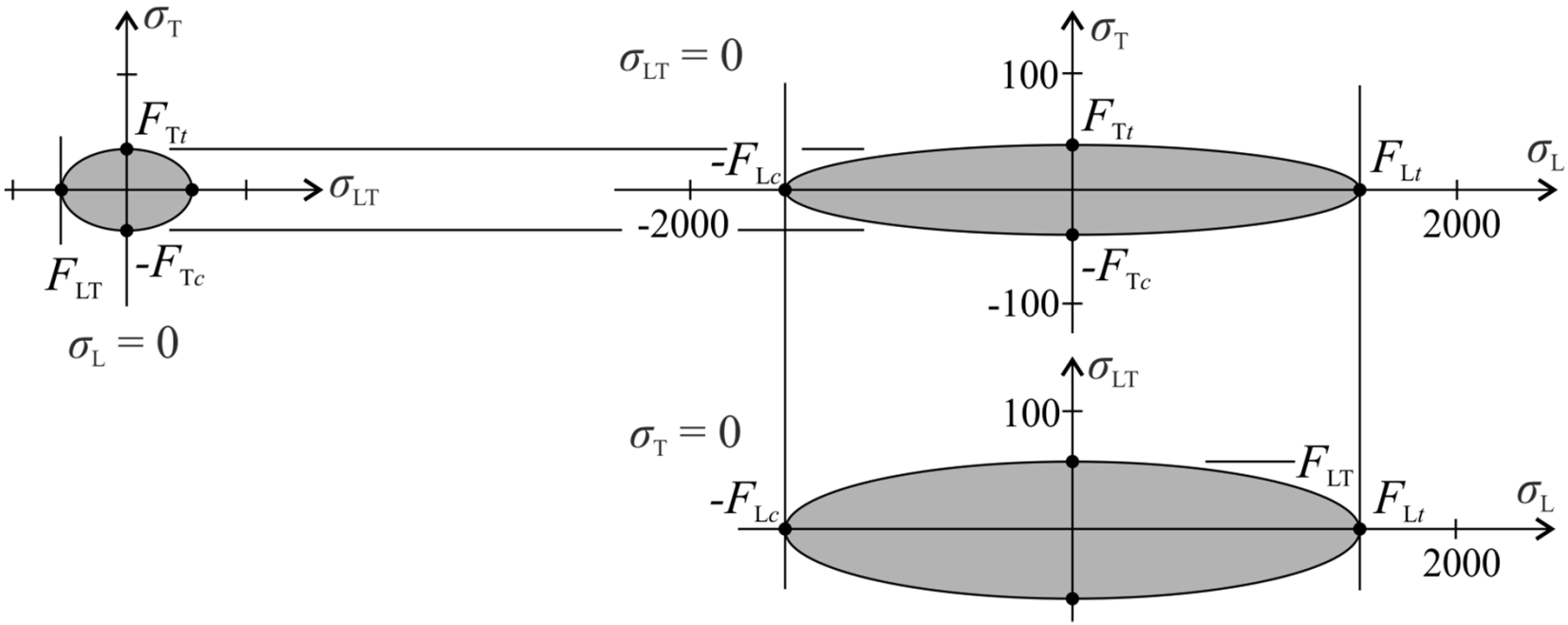
Interaktivní kritéria pevnosti

Tsai-Hillovo kritérium pevnosti

Tsai zjednodušil Hillovu podmínku pro rovinnou úlohu pro Případ jednosměrového kompozitu tak, že uvažoval $F_T = F_{T'}$.

Potom

$$\left(\frac{\sigma_L}{F_L}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_T}{F_T}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{LT}}{F_{LT}}\right)^2 - \frac{\sigma_L\,\sigma_T}{F_L^2} = 1$$

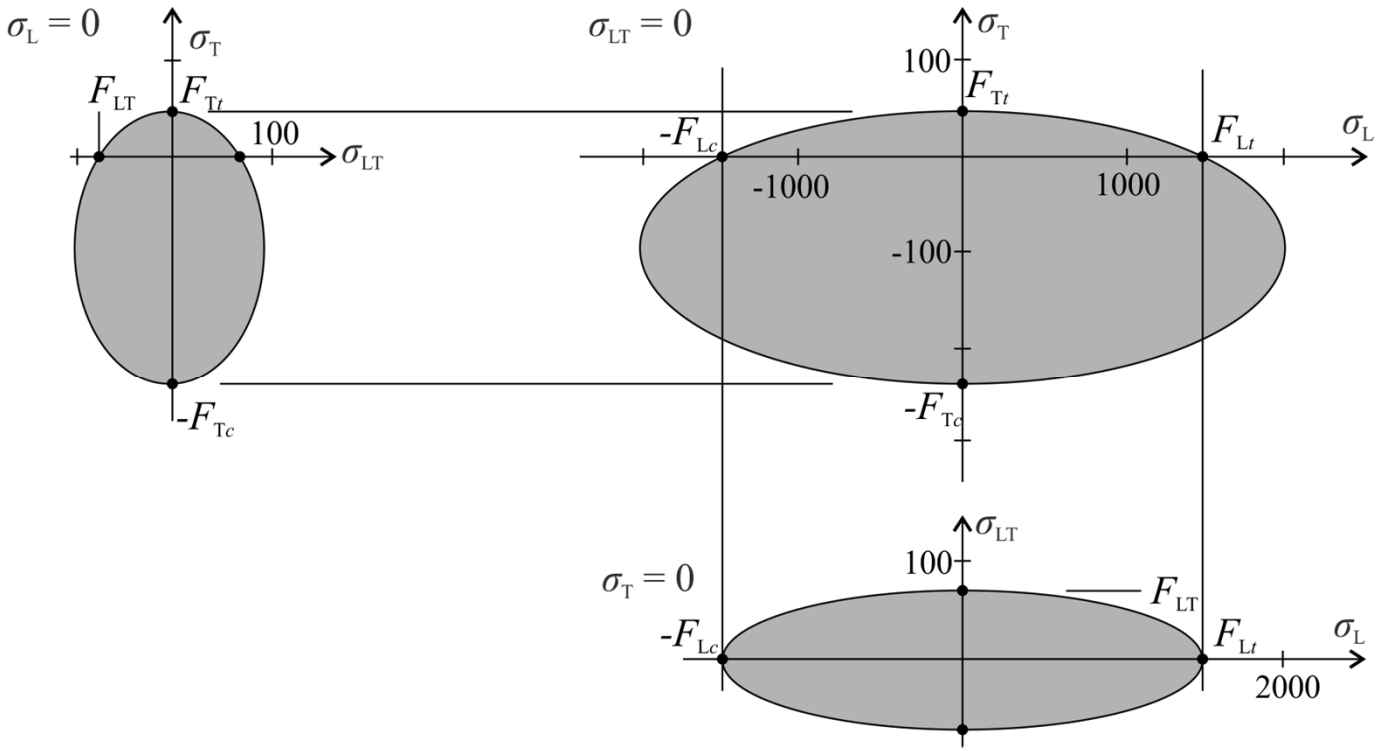


Interaktivní kritéria pevnosti

Hoffmanovo kritérium pevnosti (1967)

Zobecnil Hillovo kritérium tak, že zavedl rozdílná chování materiálu v tahu a tlaku. Pro případ rovinné napjatosti

$$\frac{\sigma_L^2}{F_{Lt}\,F_{Lc}} + \frac{\sigma_T^2}{F_{Tt}\,F_{Tc}} - \frac{\sigma_L\,\sigma_T}{F_{Lt}\,F_{Lc}} + \frac{F_{Lc}-F_{Lt}}{F_{Lt}\,F_{Lc}}\sigma_L + \frac{F_{Tc}-F_{Tt}}{F_{Tt}\,F_{Tc}}\sigma_T + \frac{\sigma_{LT}^2}{F_{LT}^2} = 1$$



Interaktivní kritéria pevnosti

Tsai-Wu kritérium pevnosti (1971)

Snaha vytvořit obecnou teorii poškození anizotropních materiálů T-W. Navrhli polynom, u kterého plocha poškození obsahuje pouze složky napětí

$$f_i \, \sigma_i + f_{ij} \, \sigma_i \, \sigma_j = 1$$

f_i , f_{ij} jsou složky dvou tenzorů

Označení složek napětí

$$\sigma_1 = \sigma_{11} = \sigma_L \qquad \sigma_2 = \sigma_{22} = \sigma_T \qquad \sigma_3 = \sigma_{33} = \sigma_{T'}$$

$$\sigma_4 = \sigma_{23} = \sigma_{TT'} \qquad \sigma_5 = \sigma_{13} = \sigma_{LT'} \qquad \sigma_6 = \sigma_{12} = \sigma_{LT}$$

Interaktivní kritéria pevnosti

Potom je možno psát

$$
\begin{aligned}
f_1\,\sigma_1 + f_2\,\sigma_2 + f_3\,\sigma_3 + f_4\,\sigma_4 + f_5\,\sigma_5 + f_6\,\sigma_6 + \\
+ f_{11}\,\sigma_1^2 + 2\,f_{12}\,\sigma_1\,\sigma_2 + ... \\
+ f_{22}\,\sigma_2^2 + 2\,f_{23}\,\sigma_2\,\sigma_3 + ... \\
\vdots \\
+ f_{66}\,\sigma_6^2 = 1
\end{aligned}
$$

Pro případ rovinné napjatosti

$$f_1\,\sigma_1 + f_2\,\sigma_2 + f_6\,\sigma_6 + f_{11}\,\sigma_1^2 + f_{22}\,\sigma_2^2 + f_{66}\,\sigma_6^2 + 2\,f_{12}\,\sigma_1\,\sigma_2 = 1$$

nebo

$$f_1\,\sigma_L + f_2\,\sigma_T + f_6\,\sigma_{LT} + f_{11}\,\sigma_L^2 + f_{22}\,\sigma_T^2 + f_{66}\,\sigma_{LT}^2 + 2\,f_{12}\,\sigma_L\,\sigma_T = 1$$

Interaktivní kritéria pevnosti

Určení konstant

$$\sigma_L = F_t \rightarrow f_1 F_t + f_{11} F_t^2 = 1$$

$$\sigma_L = -F_c \rightarrow -f_1 F_c + f_{11} F_c^2 = 1$$

atd.

Pro případ smyku

$$F_{LT}^{+} \rightarrow f_6 \; F_{LT}^{+} + f_{66} \; F_{LT}^{+2} = 1$$

$$F_{LT}^{-} \rightarrow f_6 \; F_{LT}^{-} + f_{66} \; F_{LT}^{-2} = 1$$

Z obou vztahů plyne

$$f_6 = \frac{1}{F_{LT}^{+}} - \frac{1}{F_{LT}^{-}} \; , \qquad f_{66} = \frac{1}{F_{LT}^{+} \; F_{LT}^{-}}$$

Interaktivní kritéria pevnosti

Protože

$$F_{LT}^{+} = F_{LT}^{-} = F_{LT} \qquad \text{pak} \qquad f_6 = 0, \quad f_{66} = \frac{1}{F_{LT}^2}$$

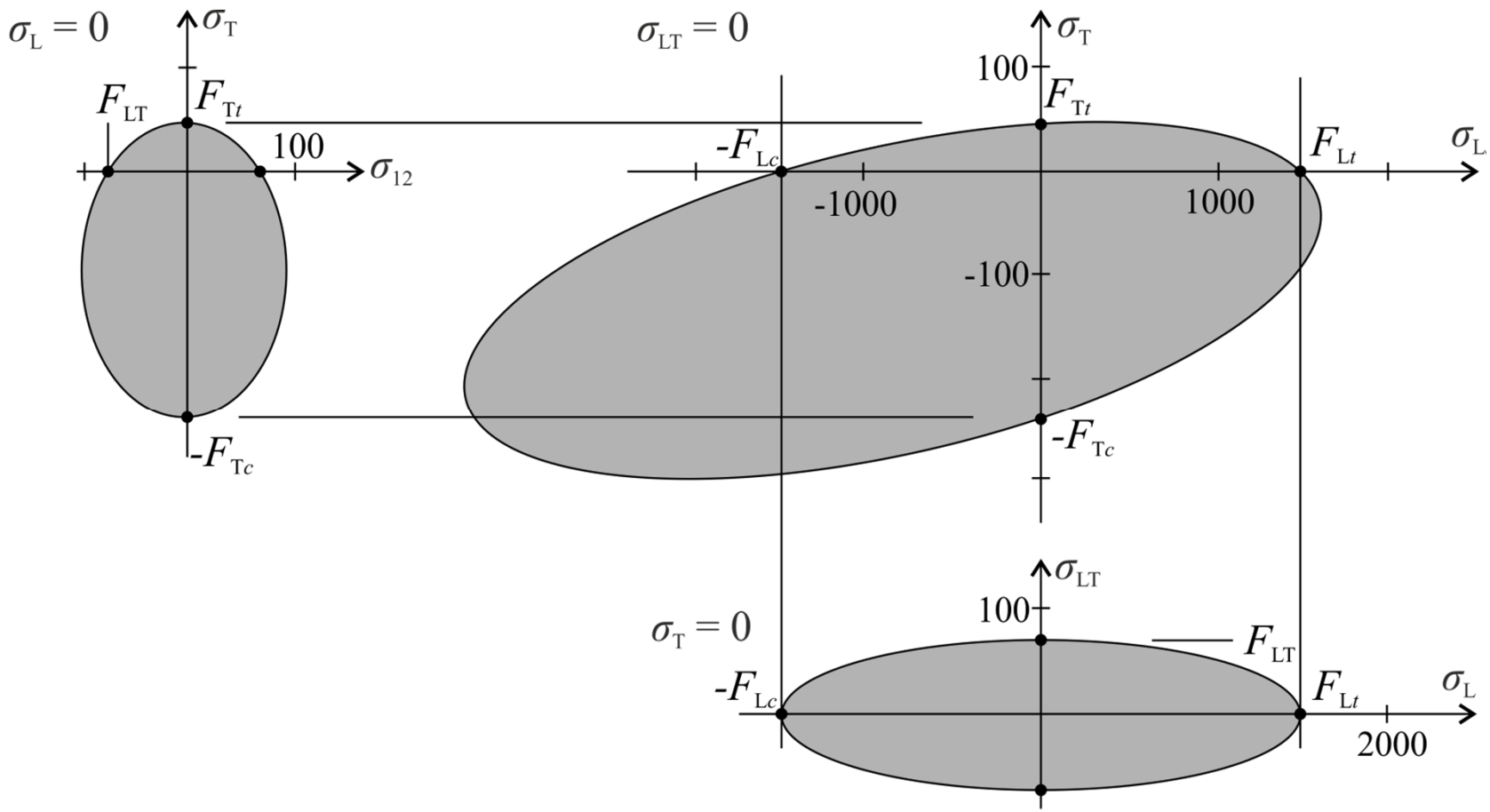
Tsai-Wu kritérium

$$\left(\frac{1}{F_{Lt}} - \frac{1}{F_{Lc}}\right)\sigma_L + \left(\frac{1}{F_{Tt}} - \frac{1}{F_{Tc}}\right)\sigma_T + \frac{\sigma_L^2}{F_{Lt}\,F_{Lc}} + \frac{\sigma_T^2}{F_{Tt}\,F_{Tc}} + \frac{\sigma_{LT}^2}{F_{LT}^2} + 2\,f_{12}^{*}\,\frac{\sigma_L\,\sigma_T}{F_{Lt}\,F_{Lc}} = 1$$

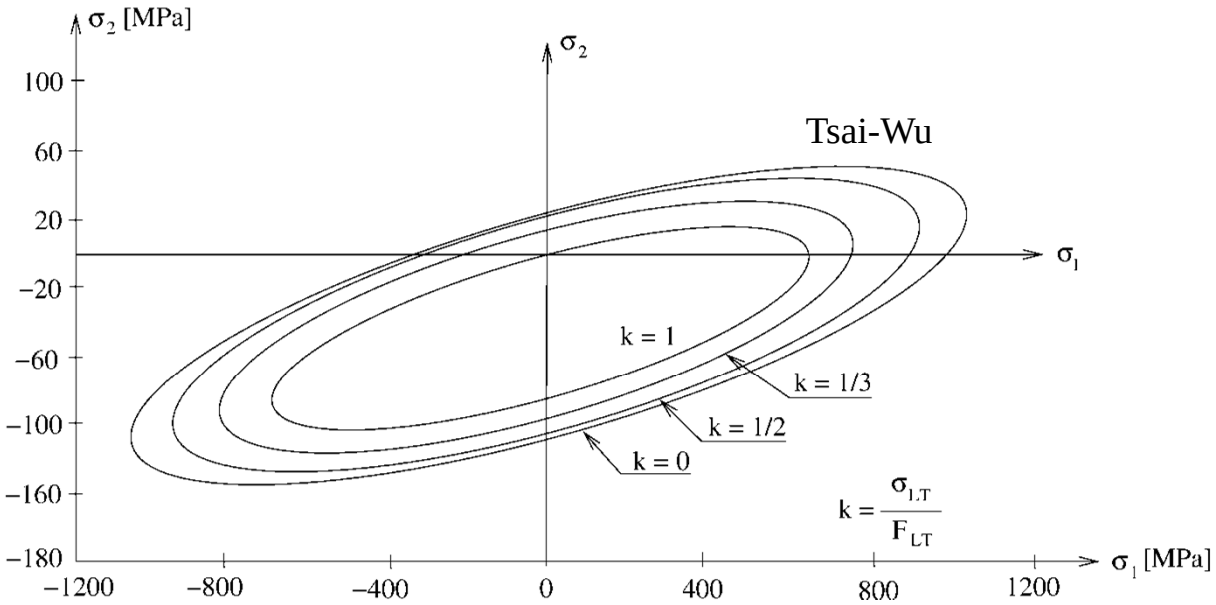
kde $$f_{12}^{*} = \frac{1}{2\sigma^2}\left\{1 - \left[F_{Lc} - F_{Lt} + \frac{F_{Lt}\,F_{Lc}}{F_{Tt}\,F_{Tc}}\left(F_{Tc} - F_{Tt}\right)\right]\sigma + \left(1 + \frac{F_{Lt}\,F_{Lc}}{F_{Tt}\,F_{Tc}}\right)\sigma^2\right\}$$

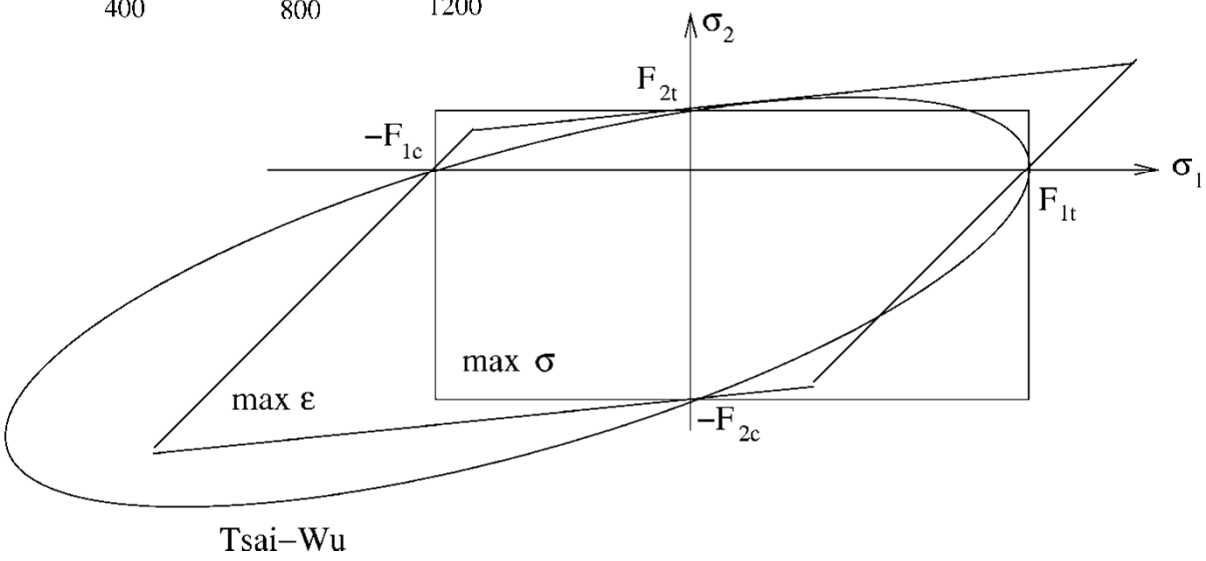
s - se určí experimentálně

Interaktivní kritéria pevnosti



Interaktivní kritéria pevnosti





Interaktivní kritéria pevnosti

Příklad 2

Uvažujte laminu namáhanou složkami napětí

$$\sigma_L = 97{,}7\,MPa,\ \sigma_T = -32{,}9\,MPa, \quad \sigma_{LT} = 63{,}3\,MPa$$

Zjistěte, zda dojde k porušení pomocí Tsai-Hillova kritéria
Jsou dány následující hodnoty pevnosti:

$$F_{Lt} = 420\,MPa, \quad F_{Lc} = 350\,MPa, \quad F_{Tt} = 10\,MPa,$$

$$F_{Tc} = 100\,MPa, \quad F_{LT} = 75\,MPa$$

$$\left(\frac{\sigma_L}{F_L}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_T}{F_T}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{LT}}{F_{LT}}\right)^2 - \frac{\sigma_L\,\sigma_T}{F_L^2} = 1$$

$$\left(\frac{97{,}7}{420}\right)^2 + \left(\frac{-32{,}9}{100}\right)^2 + \left(\frac{63{,}3}{75}\right)^2 - \frac{97{,}7\,(-32{,}9)}{420 \cdot 350} = 0{,}893 < 1$$

Interaktivní kritéria pevnosti

<u>Příklad 3</u>

Vyšetřete maximální smykové napětí laminy při orientaci Vláken $\Theta = 10^\circ$, 45° a 60°. Lamina je tvořena skleněnými vlákny a epoxidovou pryskyřicí a má následující hodnoty pevnosti:

$$F_{Lt} = 500\,MPa, \quad F_{Lc} = 350\,MPa, \quad F_{Tt} = 5\,MPa$$

$$F_{Tc} = 75\,MPa, \qquad F_{LT} = 35\,MPa$$

Pro výpočet použijte Tsai-Hillovo kritérium.

$$\sigma_L = \sigma_{xy} \sin 2\Theta, \quad \sigma_T = -\sigma_{xy} \sin 2\Theta, \quad \sigma_{LT} = \sigma_{TL} = \sigma_{xy} \cos 2\Theta$$

Dříve bylo uvedeno, že znaménko smykového napětí má vliv na vzniklou napjatost v lamině (obr. 4.17).

Interaktivní kritéria pevnosti

- Jestliže uvažujme, že $\sigma_{xy} < 0$, pak $\sigma_L < 0$ a $\sigma_T > 0$.
  Potom Tsai-Hillovo kritérium porušení (4.33) má tvar

$$\frac{\sigma_{xy}^2 \sin^2 2\Theta}{500 \cdot 500} + \frac{\sigma_{xy}^2 \sin^2 2\Theta}{77 \cdot 75} + \frac{\sigma_{xy}^2 \cos^2 2\Theta}{35 \cdot 35} - \frac{\sigma_{xy}^2 \sin^2 2\Theta}{500 \cdot 350} = 1$$

- Uvažujeme-li $\sigma_{xy} < 0$, pak $\sigma_L < 0$ a $\sigma_T > 0$.
- Tsai-Hillova podmínka má tvar

$$\frac{\sigma_{xy}^2 \sin^2 2\Theta}{350 \cdot 350} + \frac{\sigma_{xy}^2 \sin^2 2\Theta}{5 \cdot 5} + \frac{\sigma_{xy}^2 \cos^2 \Theta}{35 \cdot 35} - \frac{\sigma_{xy}^2 \sin^2 2\Theta}{500 \cdot 350} = 1$$

	Θ		
	15°	45°	60°
$+\sigma_{xym}$ $[MPa]$	39,03	75,36	54,54
$-\sigma_{xym}$ $[MPa]$	9,71	5,00	5,75

„Direct mode“ kritéria pevnosti

Rozlišují módy porušení kompozitu

- Hashinovo kritérium (1980)
- Puckovo kritérium
- LaRC kritérium

„Direct mode“ kritéria pevnosti

Hashinovo kritérium (1980) , Hashin – Rotem (1973)

Předpoklady

- Lamina je transverzálně izotropní materiál
- Hlavní osa L (směr vláken) je hlavní směr anizotropie
- Kritérium je funkcí invariantů napětí tohoto materiálu

$$I_1 = \sigma_L,\ I_2 = \sigma_T + \sigma_{T'},\ \ I_3 = \sigma_{TT'}^2 - \sigma_T\,\sigma_{T'}$$

$$I_4 = \sigma_{LT}^2 + \sigma_{LT'}^2,\ I_5 = 2\sigma_{LT}\,\sigma_{TT'}\,\sigma_{LT'} - \sigma_T\,\sigma_{LT'}^2 - \sigma_T\,\sigma_{LT}^2$$

„Direct mode“ kritéria pevnosti

Kvadratická aproximace má tvar

$$A_1 I_1 + B_1 I_1^2 + A_2 I_2 + B_2 I_2^2 + C_{12} I_1 I_2 + A_3 I_3 + A_4 I_4 = 1$$

Čtyři módy porušení

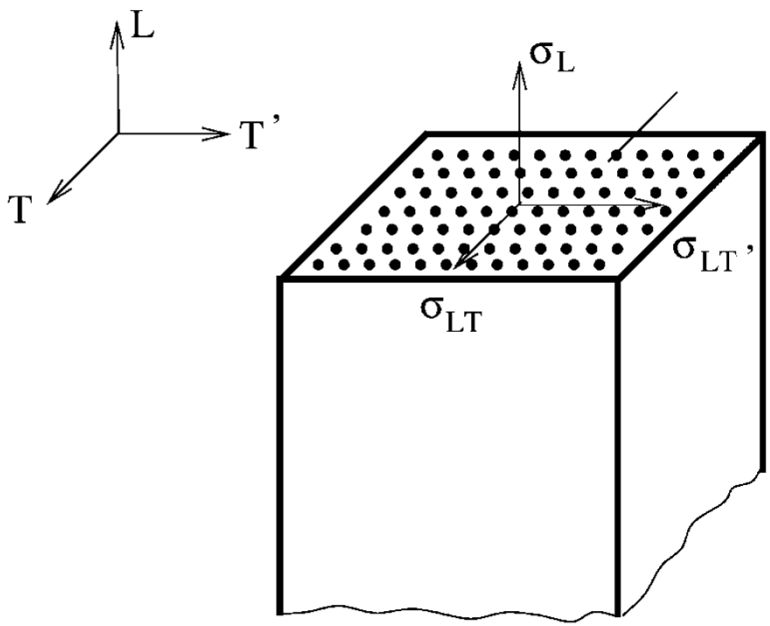
a) Porušení vláken

v tahu $\sigma_L > 0$

$$\left(\frac{\sigma_L}{F_{Lt}}\right)^2 + \frac{1}{F_{LT}^2}\left(\sigma_{LT}^2 + \sigma_{LT'}^2\right) = 1$$

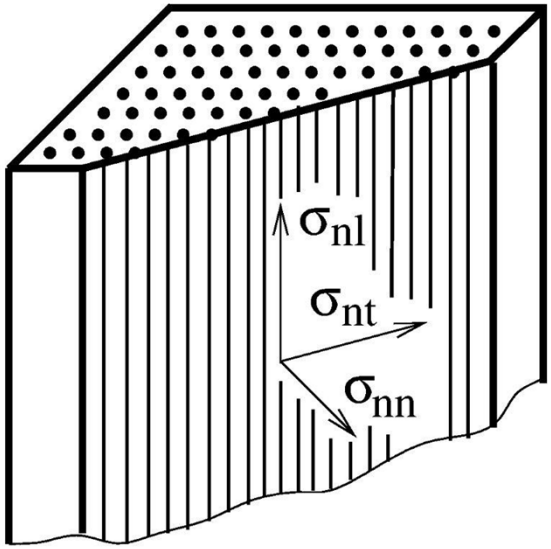
v tlaku $\sigma_L < 0$

$$\left(\frac{\sigma_L}{F_{Lc}}\right)^2 = 1$$



„Direct mode“ kritéria pevnosti

b) Porušení matrice



v tahu $\sigma_T + \sigma_{T'} > 0$

$$\frac{1}{F_{Tt}^2}\left(\sigma_T + \sigma_{T'}\right)^2 + \frac{1}{F_{TT'}^2}\left(\sigma_{TT'}^2 - \sigma_T\,\sigma_{T'}\right)^2 + \frac{1}{F_{LT}^2}\left(\sigma_{LT}^2 + \sigma_{LT'}^2\right) = 1$$

v tlaku $\sigma_T + \sigma_{T'} < 0$

$$\frac{1}{F_{Tc}}\left[\left(\frac{F_{Tc}}{2F_{TT'}}\right)^2 - 1\right]\left(\sigma_T + \sigma_{T'}\right) + \frac{1}{4F_{TT'}^2}\left(\sigma_T + \sigma_{T'}\right)^2 + \frac{1}{F_{TT'}^2}\left(\sigma_{TT'}^2 + \sigma_T\,\sigma_{T'}\right)^2 +$$

$$+\frac{1}{F_{LT}^2}\left(\sigma_{LT}^2 + \sigma_{LT'}^2\right) = -1$$

„Direct mode“ kritéria pevnosti

Pro rovinnou napjatost 2D platí

a) Porušení vláken

v tahu $\sigma_L > 0$

$$\left(\frac{\sigma_L}{F_{Lt}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{LT}}{F_{LT}}\right)^2 = 1$$

v tlaku $\sigma_L < 0$

$$\left(\frac{\sigma_L}{F_{Lc}}\right)^2 = 1$$

„Direct mode“ kritéria pevnosti

Pro rovinnou napjatost platí

a) Porušení matrice

v tahu $\sigma_L > 0$

$$\left(\frac{\sigma_T}{F_{Tt}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{LT}}{F_{LT}}\right)^2 = 1$$

v tlaku $\sigma_L < 0$

$$\left(\frac{\sigma_T}{2F_{TT'}}\right)^2 + \left[\left(\frac{F_{Tc}}{2F_{TT'}}\right)^2 - 1\right]\frac{\sigma_T}{F_{Tc}} + \left(\frac{\sigma_{LT}}{F_{LT}}\right)^2 = 1$$

„Direct mode“ kritéria pevnosti

- **Puckovo kritérium pevnosti**

2D – je uvažována rovinná napjatost

Současně musí být aplikována dvě nezávislá kritéria porušení

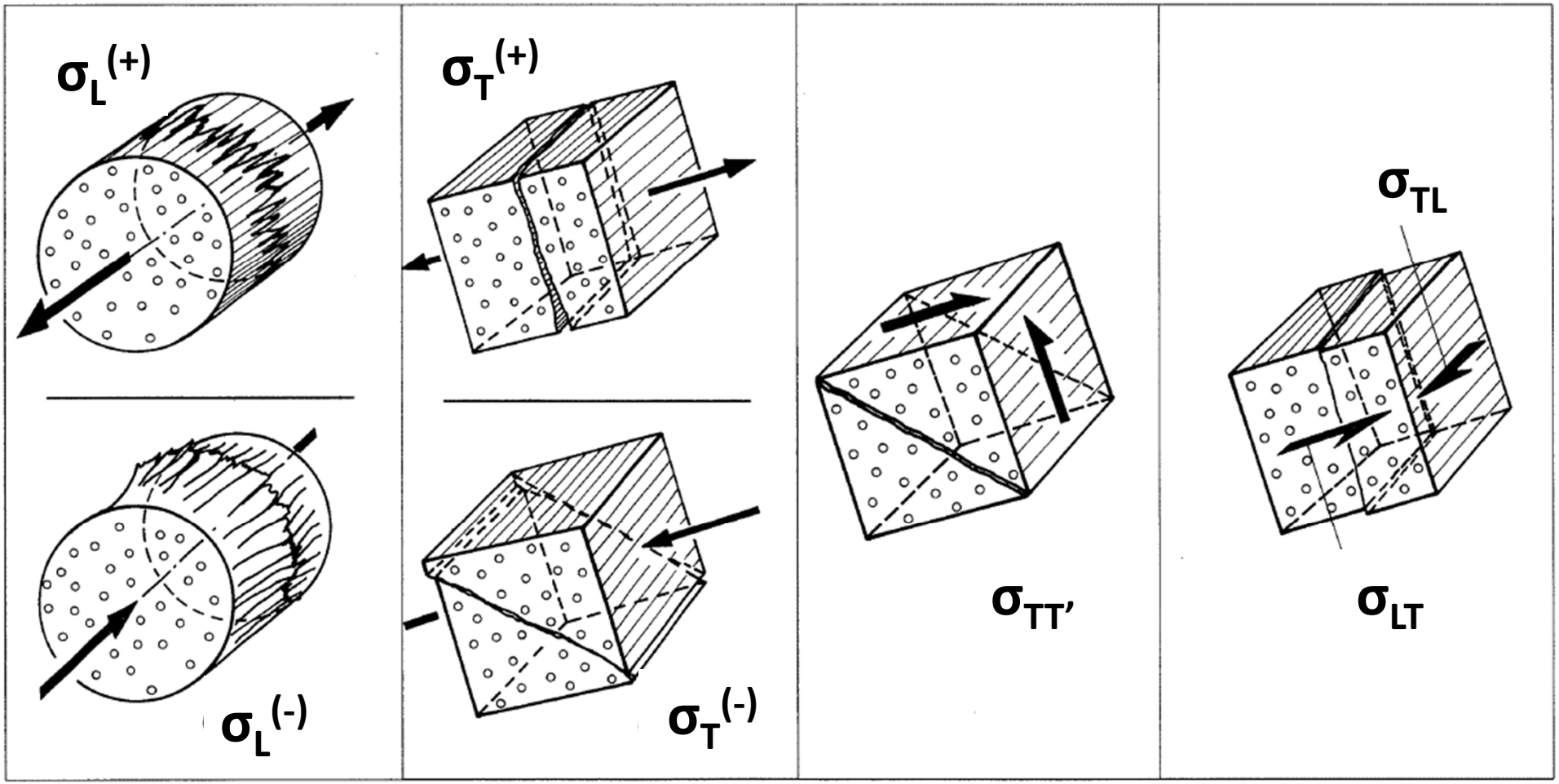
a) Kritérium pro porušení vláken

b) Kritérium pro porušení mezi vlákny

Obě porušení jsou zcela odlišného charakteru, nelze aplikovat do jediné podmínky

„Direct mode“ kritéria pevnosti

Zatěžování laminy



„Direct mode“ kritéria pevnosti

Ad a) **Kritérium pro porušení vláken**

Podmínka pro porušení vlákna při kombinovaném zatížení vláken σ_{fL}, σ_{fT}

$$\sigma_{fL} = F_{ft} \;,\; \sigma_{fL} \geq 0 \;,\; \frac{1}{F_{\varepsilon Lt}}\left(\varepsilon_L + \frac{\nu_{fLT}}{E_{fL}} m_{\sigma f}\, \sigma_T\right) = 1 \quad \text{pro} \quad (....) \geq 0$$

$$\sigma_{fL} = -F_{fc} \;,\; \sigma_{fL} < 0 \;,\; \frac{1}{F_{\varepsilon Lc}}\left(\varepsilon_L + \frac{\nu_{fLT}}{E_{fL}} m_{\sigma f}\, \sigma_T\right) = -1 \quad \text{pro} \quad (....) < 0$$

kde $F_{\varepsilon Lt}, F_{\varepsilon Lc}$ - je mezní tahová, tlaková deformace v podélném směru

ε_L - je deformace laminy v podélném směru od zatížení působícího v témže směru

ν_{fLT} - je Poissonovo číslo vlákna

„Direct mode“ kritéria pevnosti

E_{fL} - je modul pružnosti vlákna v tahu

σ_T - je napětí laminy v příčném směru

m_{σ_f} - je koeficient zahrnující účinek zvýšení napětí vznikající vlivem rozdílných modulů pružnosti vlákna a matrice (ve směru *T*), který vede k nerovnoměrnému rozložení napětí σ_T .

Z mikromechanického hlediska je napětí ve vlákně nepatrně vyšší než v matrici.

Na základě experimentů

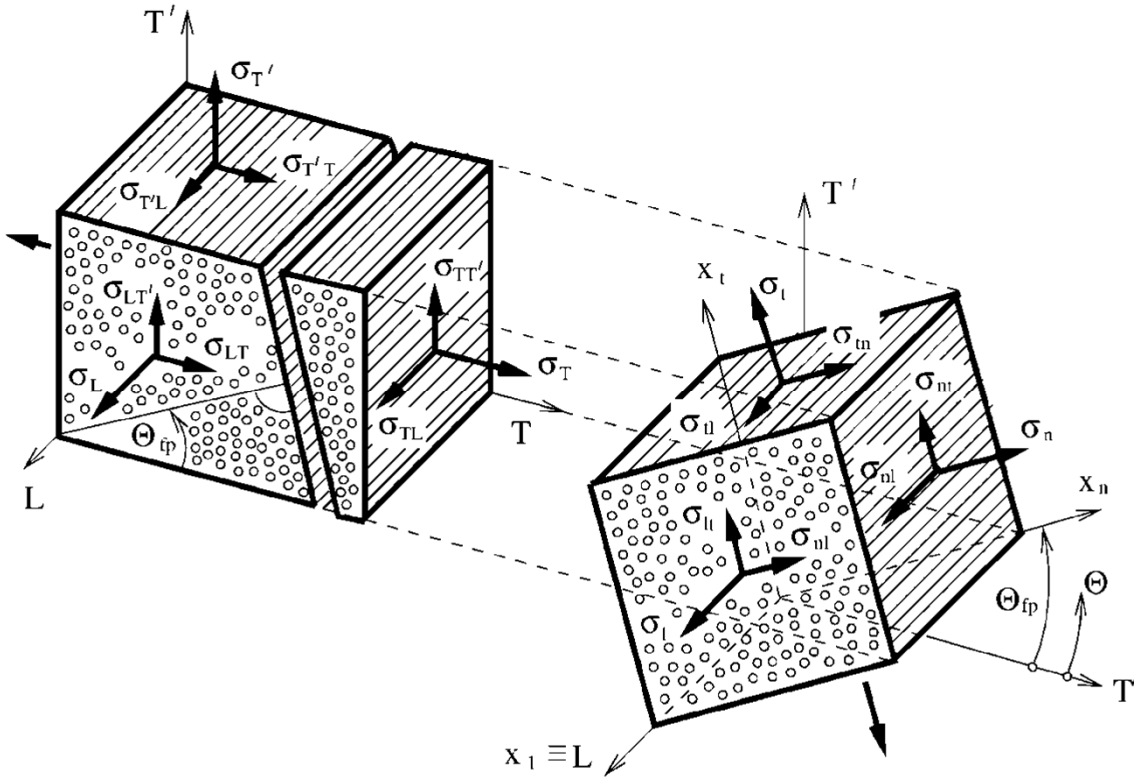
$$\frac{1}{F_{\varepsilon Lc}}\left|\left(\varepsilon_L + \frac{\nu_{fLT}}{E_{fL}} m_{\sigma f}\ \sigma_T\right)\right| + (10\,\varepsilon_{LT})^2 = 1 \quad \text{pro} \quad (....) < 0$$

„Direct mode“ kritéria pevnosti

Ad b) **Kritérium pro porušení materiálu mezi vlákny**

Vektor napětí $\lfloor \sigma_L, \sigma_T, \sigma_{T'}, \sigma_{TT'}, \sigma_{LT'}, \sigma_{LT} \rfloor$ v $O(L, T, T')$

Porušení materiálu je určeno pouze napětími, které jsou v rovině lomu



„Direct mode“ kritéria pevnosti

Napětí v rovině *A* za předpokladu rovinné napjatosti

$$[\sigma_L, \sigma_T, \sigma_{LT}]^T$$

$$\sigma_n = \sigma_T \cos^2 \Theta, \quad \sigma_{nt} = -\sigma_T \sin\Theta \cos\Theta, \quad \sigma_{nl} = \sigma_{TL} \cos\Theta$$

Puck zavedl značení $\sigma_n \sim \sigma_\perp, \quad \sigma_{nt} \sim \sigma_{\perp\perp}, \quad \sigma_{nl} \sim \sigma_{\perp\parallel}$

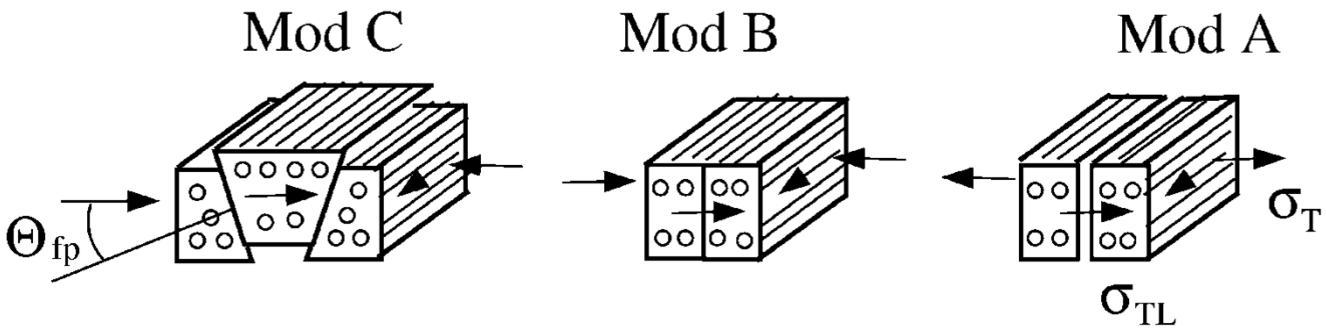
Podmínka pevnosti

$$\left(\frac{\sigma_n}{R_\perp^{(+)A}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{nt}}{R_{\perp\perp}^A}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{nl}}{R_{\perp\parallel}^A}\right)^2 = 1 \quad \text{pro} \quad \sigma_n \geq 0$$

$$R_\perp^{(+)A} = F_{Tt}, \quad R_\perp^{(-)A} = F_{Tc}, \quad R_{\perp\perp}^A = F_{TT'}, \quad R_{\perp\parallel}^A = F_{LT}$$

„Direct mode“ kritéria pevnosti

Lom mezi vlákny – 3 druhy mechanismů (Mód A, B, C)



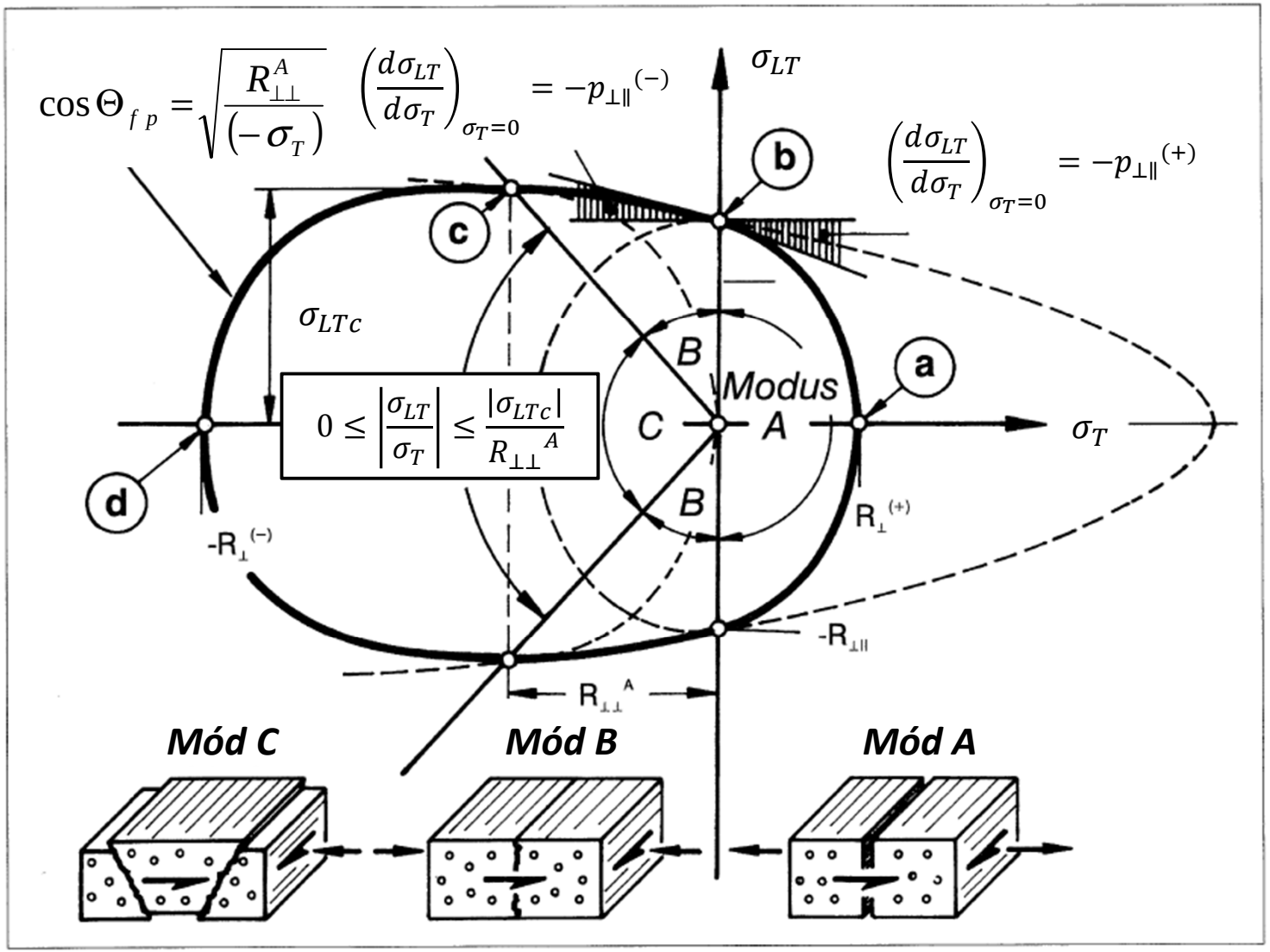
Speciální případ rovinné napjatosti $[\sigma_T, \sigma_{LT}]$

Mód A $\sigma_T > 0$ $\Theta_{fp} = 0 \Rightarrow \sigma_n = \sigma_T, \quad \sigma_{nt} = 0, \quad \sigma_{nl} = \sigma_{TL}$

Mód B $\sigma_T < 0$ $\Theta_{fp} = 0 \Rightarrow \sigma_n = \sigma_T, \quad \sigma_{nt} = 0, \quad \sigma_{nl} = \sigma_{TL}$

Mód C $\sigma_T < 0$ $\Theta_{fp} = arc\cos\sqrt{\dfrac{R_{\perp\perp}^{A}}{(-\sigma_T)}}$

„Direct mode“ kritéria pevnosti



„Direct mode“ kritéria pevnosti

Typ porušení	Mód porušení	Kritérium porušení	Podmínky platnosti
Porušení vláken	Tahem	$\frac{1}{F_{\varepsilon Lt}}\left(\varepsilon_L + \frac{\nu_{fLT}}{E_{fL}} m_{\sigma f}\ \sigma_T\right) = 1$	$(\ldots) \geq 0$
	Tlakem	$\frac{1}{F_{\varepsilon Lc}}\left\lvert\left(\varepsilon_L + \frac{\nu_{fLT}}{E_{fL}} m_{\sigma f}\ \sigma_T\right)\right\rvert + (10\,\varepsilon_{LT})^2 = 1$	$(\ldots) < 0$
Porušení mezi vlákny	Mód A, $\Theta_{fp} = 0°$	$\sqrt{\left(\frac{\sigma_{TL}}{F_{LT}}\right)^2 + \left(1 - \frac{p_{\perp\parallel}^{(+)}}{F_{LT}} F_{Tt}\right)^2 \left(\frac{\sigma_T}{F_{Tt}}\right)^2} + \frac{p_{\perp\parallel}^{(+)}}{F_{LT}} \sigma_T = 1$	$\sigma_T > 0$
	Mód B, $\Theta_{fp} = 0°$	$\frac{1}{F_{LT}}\left[\sqrt{\sigma_{TL}^2 + \left(p_{\perp\parallel}^{(-)}\ \sigma_T\right)^2} + p_{\perp\parallel}^{(-)}\ \sigma_T\right] = 1$	$\sigma_T < 0 \leq \left\lvert\frac{\sigma_T}{\sigma_{TL}}\right\rvert \leq \frac{R_{\perp\perp}^A}{\lvert\sigma_{TLc}\rvert}$
	Mód C $\cos\Theta_{fp} = \sqrt{\frac{f_w R_{\perp\perp}^A}{(-\sigma_T)}}$	$\left[\left(\frac{\sigma_{TL}}{2\left(1 + p_{\perp\perp}^{(-)} F_{LT}\right)}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_T}{F_{Tc}}\right)^2\right] \frac{F_{Tc}}{(-\sigma_T)} = 1$	$\sigma_T < 0 \leq \left\lvert\frac{\sigma_{TL}}{\sigma_T}\right\rvert \leq \frac{\lvert\sigma_{TLc}\rvert}{R_{\perp\perp}^A}$
Další potřebné vztahy	$p_{\perp\parallel}^{(+)} = -\left(\frac{d\,\sigma_{TL}}{d\,\sigma_T}\right)_{\sigma_T=0}$, křivky (σ_T, σ_{TL}), $\sigma_T \geq 0$, $p_{\perp\parallel}^{(-)} = -\left(\frac{d\,\sigma_{TL}}{d\,\sigma_T}\right)_{\sigma_T=0}$, křivky (σ_T, σ_{TL}), $\sigma_T \leq 0$ $R_{\perp\perp}^A = \frac{F_{Tc}}{2\left(1 + p_{\perp\perp}^{(-)}\right)} = \frac{F_{LT}}{2p_{\perp\parallel}^{(-)}}\left(\sqrt{1 + 2p_{\perp\parallel}^{(-)}\frac{F_{Tc}}{F_{LT}}} - 1\right)$, $p_{\perp\perp}^{(-)} = p_{\perp\parallel}^{(-)}\frac{R_{\perp\perp}^A}{F_{LT}}$, $\sigma_{TLc} = F_{LT}\sqrt{1 + 2p_{\perp\perp}^{(-)}}$		

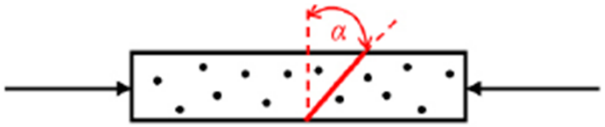
„Direct mode“ kritéria pevnosti

Kritérium LaRC04

Rozeznává 6 módů porušení

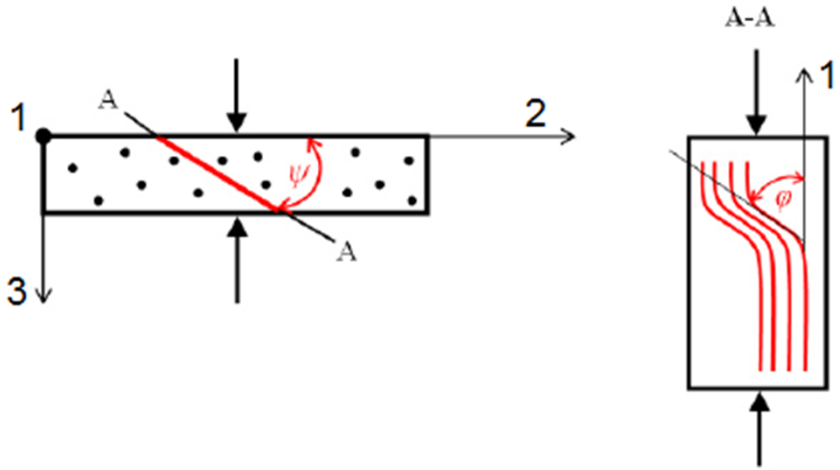
LaRC #1

LaRC #2



LaRC #3

LaRC #4



„Direct mode“ kritéria pevnosti

LaRC #5	tlak ve směru vláken a tlak ve směru příčném na vlákna – vychýlení vláken a porušení matrice pod určitým úhlem
LaRC #6	tlak ve směru vláken a tah ve směru příčném na vlákna – vychýlení vláken jejich porušení a následuje porušení matrice mezi vlákny

„Direct mode“ kritéria pevnosti

LaRC#1, $\sigma_2 \geq 0$	$FI_{\mathrm{M}} = (1-g)\left(\frac{\sigma_T}{F_{Tt}}\right) + g\left(\frac{\sigma_T}{F_{Tt}}\right)^2 + \chi$
LaRC#1, první přiblížení	$FI_{\mathrm{M}} = \left(\frac{\sigma_T}{F_{Tt}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{LT}}{F_{LT}}\right)^2$
LaRC#2, $\sigma_2 < 0$ nebo $\sigma_3 < 0$; $\sigma_1 \geq -Y^{\mathrm{C}}$	$FI_{\mathrm{M}} = \left(\frac{\tau^{\mathrm{T}}}{F_{TT'} - \eta^{\mathrm{T}}\sigma_{\mathrm{n}}}\right)^2 + \left(\frac{\tau^{\mathrm{L}}}{F_{LT} - \eta^{\mathrm{L}}\sigma_{\mathrm{n}}}\right)^2$
LaRC#3, $\sigma_1 \geq 0$	$FI_{\mathrm{F}} = \frac{\sigma_L}{F_{LT}}$
LaRC#4, $\sigma_1 < 0$; $\sigma_{2\mathrm{m}2\mathrm{m}} < 0$	$FI_{\mathrm{F}} = \left(\frac{\tau_{1\mathrm{m}2\mathrm{m}}}{F_{LT} - \eta^{\mathrm{L}}\sigma_{2\mathrm{m}2\mathrm{m}}}\right)^2$
LaRC#5, $\sigma_2 < 0$ nebo $\sigma_3 < 0$; $\sigma_1 < -Y^{\mathrm{C}}$	$FI_{\mathrm{M}} = \left(\frac{\tau^{\mathrm{Tm}}}{F_{TT'} - \eta^{\mathrm{T}}\sigma_{\mathrm{n}}^{\mathrm{m}}}\right)^2 + \left(\frac{\tau^{\mathrm{Lm}}}{F_{LT} - \eta^{\mathrm{L}}\sigma_{\mathrm{n}}^{\mathrm{m}}}\right)^2$
LaRC#6, $\sigma_1 < 0$; $\sigma_{2\mathrm{m}2\mathrm{m}} \geq 0$	$FI_{\mathrm{FM}} = (1-g)\left(\frac{\sigma_{2\mathrm{m}2\mathrm{m}}}{F_{Tt}}\right) + g\left(\frac{\sigma_{2\mathrm{m}2\mathrm{m}}}{F_{Tt}}\right)^2 + \chi$
LaRC#6, první přiblížení	$FI_{\mathrm{FM}} = \left(\frac{\sigma_{2\mathrm{m}2\mathrm{m}}}{F_{Tt}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{1\mathrm{m}2\mathrm{m}}}{F_{LT}}\right)^2$

„Direct mode“ kritéria pevnosti

Koeficient příčného tření materiálu $\eta^{\mathrm{T}} = -\dfrac{1}{\tan(2\alpha_0)}$

kde $\alpha_0 = 53^\circ \pm 5^\circ$ je úhel, pod kterým dojde k porušení matrice

Příčná pevnost ve smyku $F_{TT'} = F_{Tc}\cos(\alpha_0)\left(\sin(\alpha_0) + \dfrac{\cos(\alpha_0)}{\tan(2\alpha_0)}\right)$

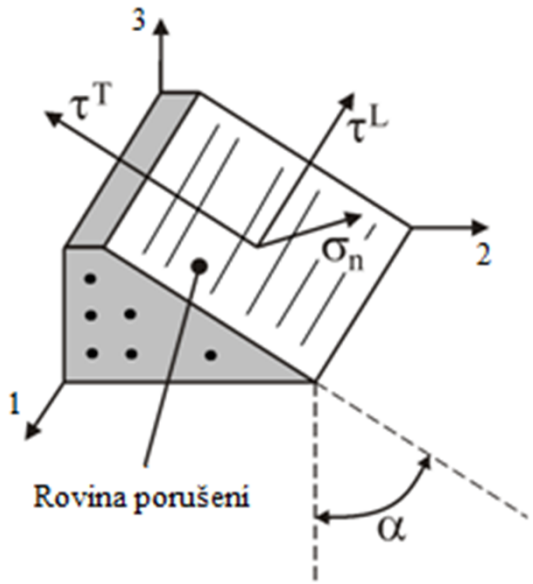
Koeficient podélného tření materiálu $\eta^{\mathrm{L}} = S^{\mathrm{L}}\dfrac{\eta^{\mathrm{T}}}{S^{\mathrm{T}}}$

„Direct mode“ kritéria pevnosti

$$\sigma_n = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\cos(2\alpha) + \sigma_{23}\sin(2\alpha)$$

$$\tau^T = -\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\sin(2\alpha) + \sigma_{23}\cos(2\alpha)$$

$$\tau^L = -\sigma_{12}\cos(2\alpha) + \sigma_{13}\sin(2\alpha)$$



„Direct mode“ kritéria pevnosti

Úhel, při kterém se inicializuje vychýlení vláken ze směru 1

$$\varphi^0 = \varphi^{\mathrm{C}} - \gamma^{\mathrm{C}}_{1\mathrm{m}2\mathrm{m}}$$

kde φ^{C} je vychýlení vláken při porušení čistým tlakem působícím ve směru vláken a je zkos v případě porušení materiálu čistým tlakem ve směru vláken. Tyto veličiny lze určit ze vztahů

$$\varphi^{\mathrm{C}} = \arctan\left[\frac{1-\sqrt{1-4\left(\frac{F_{LT}}{F_{Lc}}+\eta^{\mathrm{L}}\right)\frac{F_{LT}}{F_{Lc}}}}{2\left(\frac{F_{LT}}{F_{Lc}}+\eta\right)}\right],$$

$$\gamma^{\mathrm{c}}_{1\mathrm{m}2\mathrm{m}} = \frac{\varphi^{\mathrm{C}} F_{Lc}}{G_{12}}.$$

$$\psi = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2\sigma_{23}}{\sigma_2 - \sigma_3}\right)$$

„Direct mode“ kritéria pevnosti

Napětí v rovině, ve které dojde k vychýlení vláken ze směru 1 (určené úhlem ψ) se vypočtou ze vztahů

$$
\begin{aligned}
\sigma_{2\psi 2\psi} &= \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\cos(2\psi) + \sigma_{23}\sin(2\psi), \\
\sigma_{3\psi 3\psi} &= \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_{2\psi 2\psi}, \\
\tau_{12\psi} &= \sigma_{12}\cos(\psi) + \sigma_{13}\sin(\psi), \\
\tau_{2\psi 3\psi} &= 0, \\
\tau_{31\psi} &= \sigma_{13}\cos(\psi) - \sigma_{12}\sin(\psi).
\end{aligned}
$$

Potom bude úhel, o který se vychýlí vlákna ze směru 1

$$
\varphi = \frac{\tau_{12\psi}}{\left|\tau_{12\psi}\right|}\left(\varphi^0 + \gamma_{1\mathrm{m}2\mathrm{m}}\right)
$$

„Direct mode“ kritéria pevnosti

kde γ_{1m2m} je zkos v souřadném systému daném směrem vychýlení vláken. Jeho velikost je dána vztahem

$$\gamma_{1m2m} = \frac{\varphi^0 G_{12} + \left|\tau_{12\psi}\right|}{G_{12} + \sigma_1 - \sigma_{2\psi 2\psi}} - \varphi^0$$

Nyní je možné vyčíslit napětí v souřadném systému, který je dán úhlem vychýlení vláken φ

$$\sigma_{1m1m} = \frac{\sigma_1 + \sigma_{2\psi 2\psi}}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_{2\psi 2\psi}}{2}\cos(2\varphi) + \tau_{12\psi}\sin(2\varphi),$$

$$\sigma_{2m2m} = \sigma_1 + \sigma_{2\psi 2\psi} - \sigma_{1m1m},$$

$$\tau_{1m2m} = \frac{\sigma_1 - \sigma_{2\psi 2\psi}}{2}\sin(2\varphi) + \tau_{12\psi}\cos(2\varphi),$$

$$\tau_{2m3\psi} = \tau_{2\psi 3\psi}\cos(\varphi) - \tau_{3\psi 1}\sin(\varphi),$$

$$\tau_{3\psi 1m} = \tau_{3\psi 1}\cos(\varphi).$$

„Direct mode“ kritéria pevnosti

Pro kombinovaný mód *LaRC#6* je uvažováno porušení vláken jen v případě

$$\sigma_1 < -\frac{F_{Lc}}{2}$$

Napětí v rovině porušení, která je určena úhlem α, lze vypočíst ze vztahů

$$\sigma_{\mathrm{n}}^{\mathrm{m}} = \frac{\sigma_{2\mathrm{m}2\mathrm{m}} + \sigma_{3\psi 3\psi}}{2} + \frac{\sigma_{2\mathrm{m}2\mathrm{m}} - \sigma_{3\psi 3\psi}}{2}\cos(2\alpha) + \tau_{2\mathrm{m}3\psi}\sin(2\alpha),$$

$$\tau^{\mathrm{Tm}} = -\frac{\sigma_{2\mathrm{m}2\mathrm{m}} - \sigma_{3\psi 3\psi}}{2}\sin(2\alpha) + \tau_{2\mathrm{m}3\psi}\sin(2\alpha),$$

$$\tau^{\mathrm{Lm}} = \tau_{1m2m}\cos(\alpha) + \tau_{3\psi 1\mathrm{m}}\sin(\alpha).$$

Srovnání některých kritérií

<u>Příklad 4</u>

Uvažujme laminu s následujícími mechanickými vlastnostmi:

$$E_L = 76 \cdot 10^3\, MPa, \quad E_T = 5{,}5 \cdot 10^3\, MPa, \quad \nu_{LT} = 0{,}34,$$

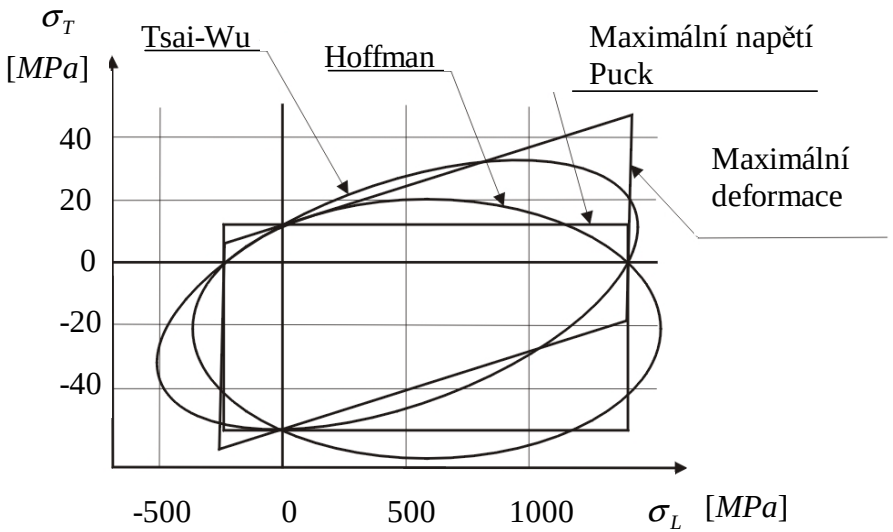
$$G_{LT} = 2{,}36 \cdot 10^3\, MPa, \quad F_{Lt} = 1400\, MPa, \quad F_{Lc} = 235\, MPa, \; F_{Tt} = 12\, MPa,$$

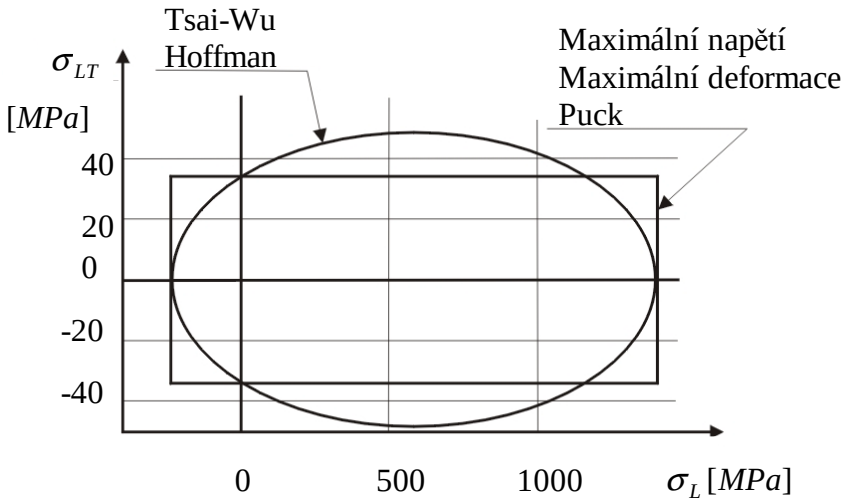
$$F_{Tc} = 53\, MPa, \quad F_{LT} = 34\, MPa$$

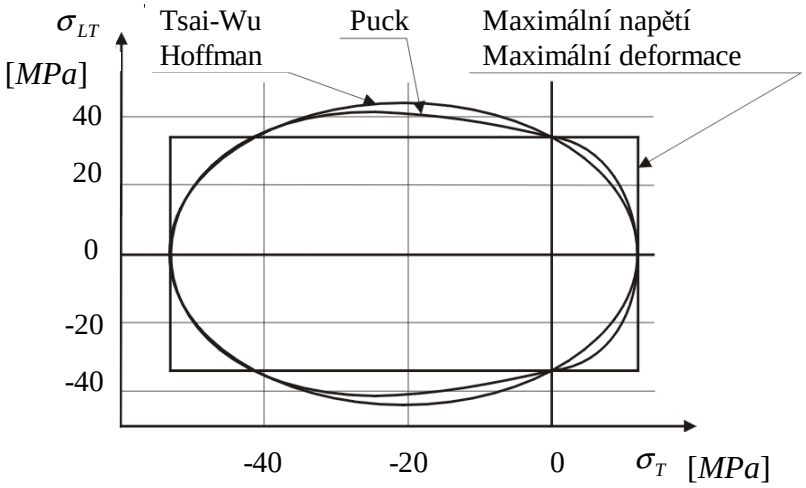
Zakreslete mezné křivky v souřadnicovém napěťovém systému pro následující pevnostní kritéria:

- Kritérium maximálního napětí
- Kritérium maximální deformace
- Hoffmanovo kritérium
- Tsai-Hillovo kritérium
- Puckovo kritérium

„Direct mode“ kritéria pevnosti

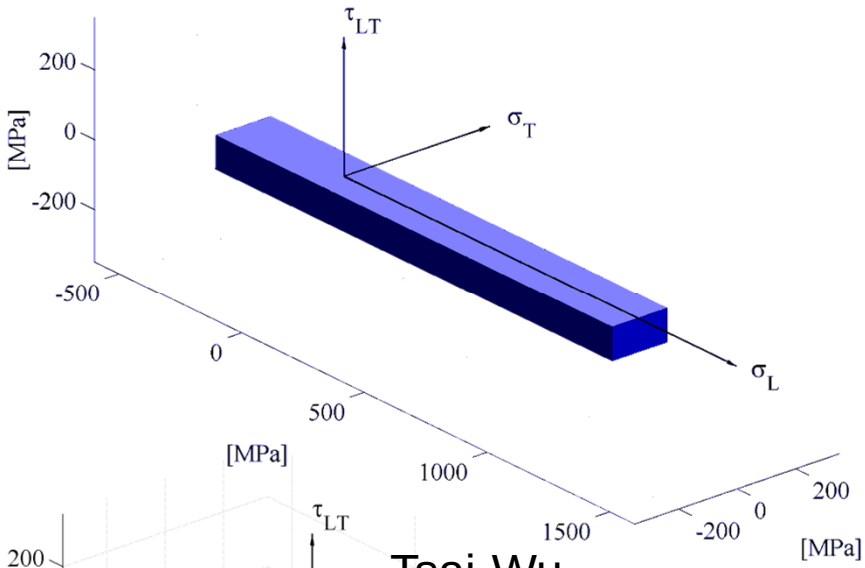




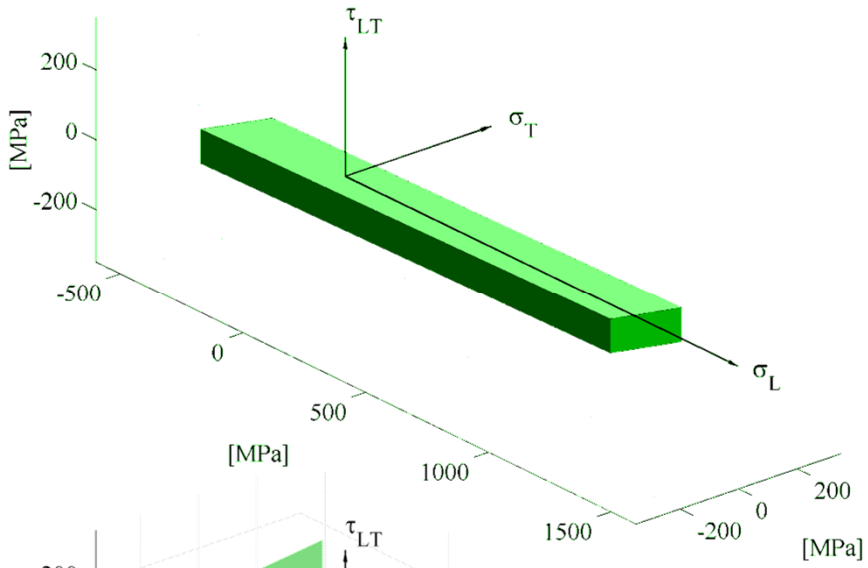


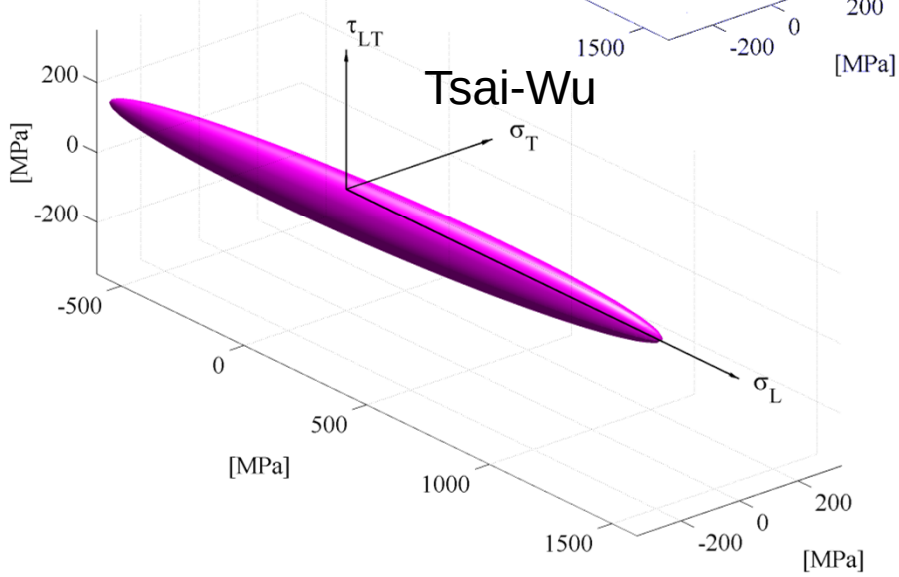
„Direct mode“ kritéria pevnosti

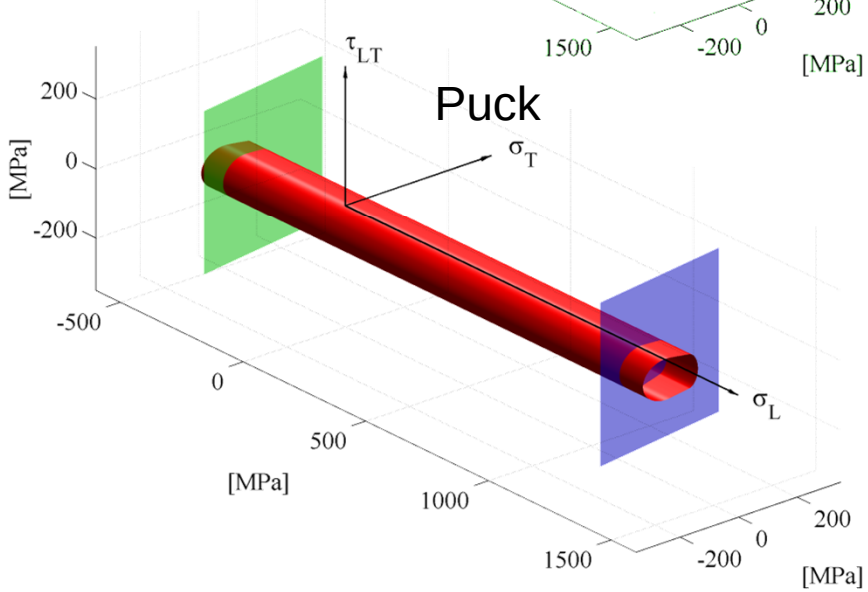
Maximální napětí



Maximální deformace

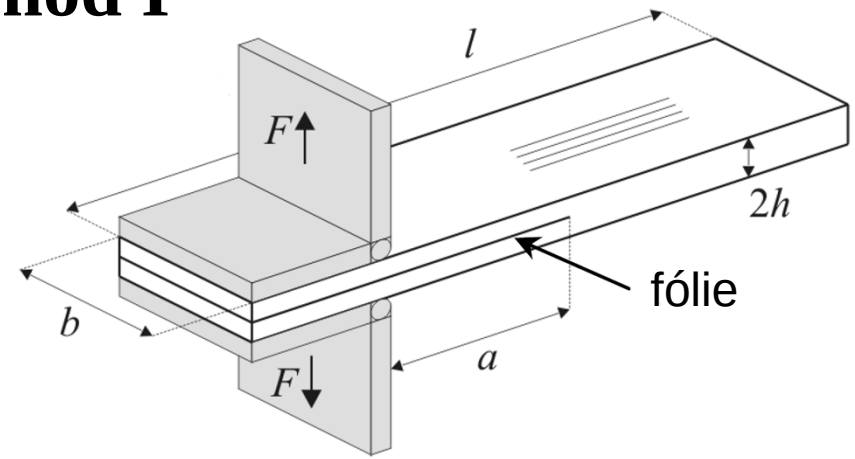


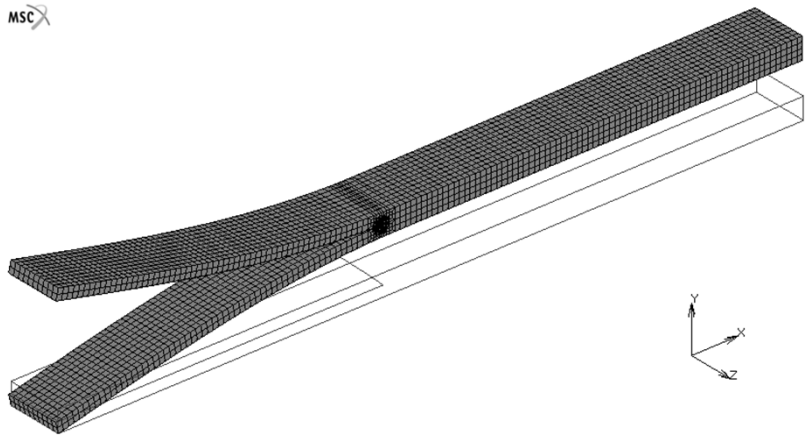




Delaminace

mód I





definice

$$G = -\frac{1}{b}\frac{dU}{da}$$

nosník dle Euler-Bernoulli

$$G_I = \frac{12F^2a^2}{b^2h^3E_{11}}$$

ASTM

$$G_I = \frac{3F\delta}{2ba}$$

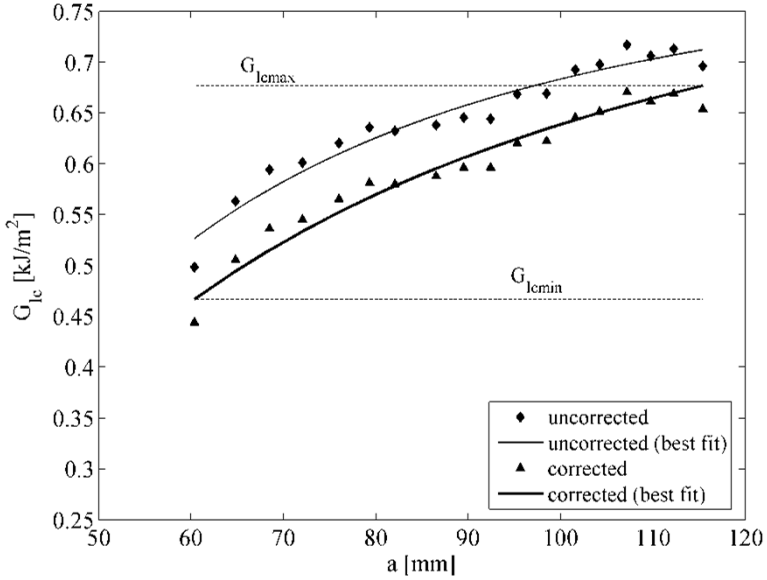
ASTM s korekcí

$$G_I = \frac{3F\delta}{2b(a+|\Delta|)}$$

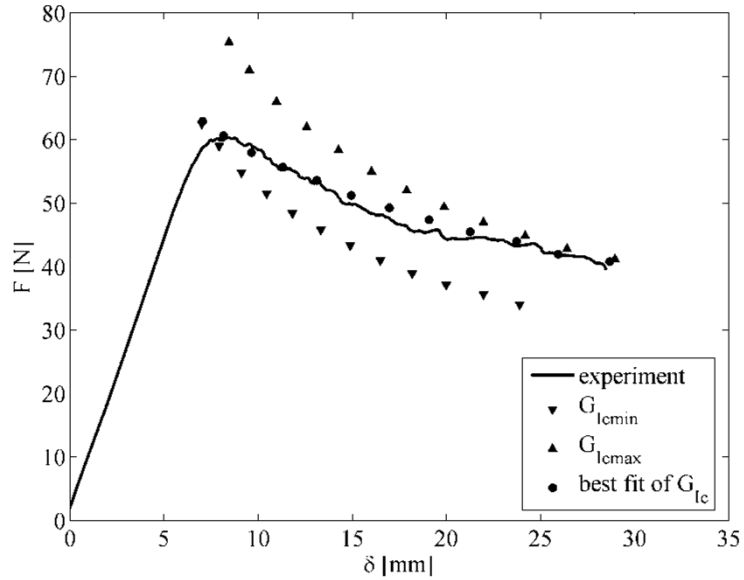
Delaminace

$$G_I = J_I$$

Vypočtená hodnota G_I



Závislost síla – posuv



Metoda postupného porušování

Porušení vláken

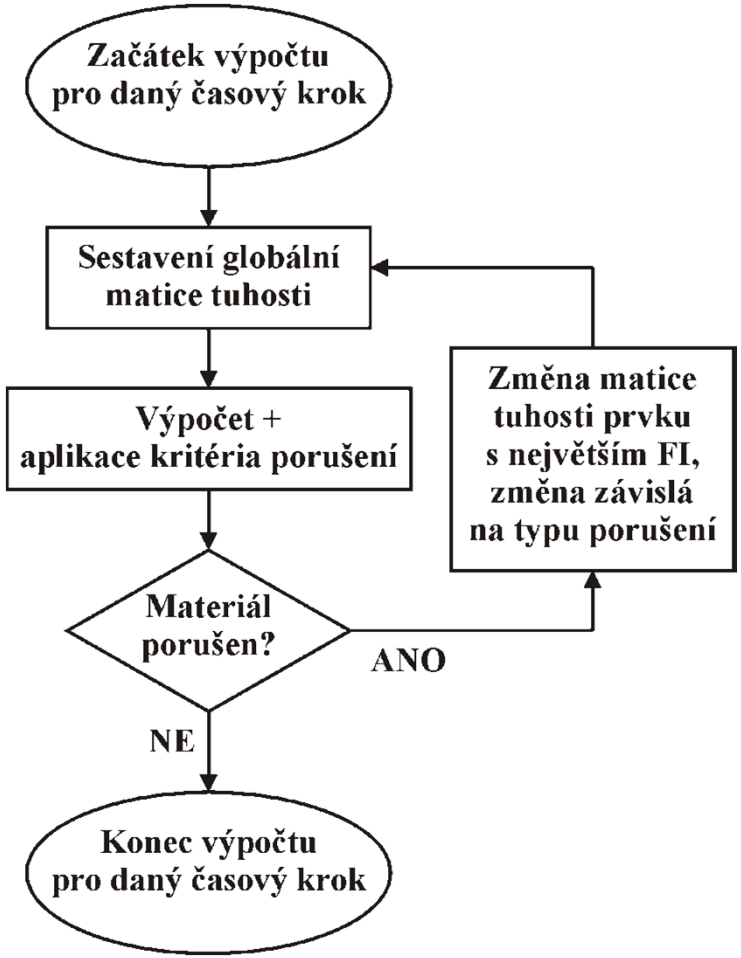
$$\mathbf{C}^F = \begin{bmatrix} \dfrac{\nu_m E_m}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

Porušení matrice

$$\mathbf{C}^M = \begin{bmatrix} C_{11} & \theta & 0 \\ \theta & \theta & 0 \\ 0 & 0 & \theta \end{bmatrix}$$

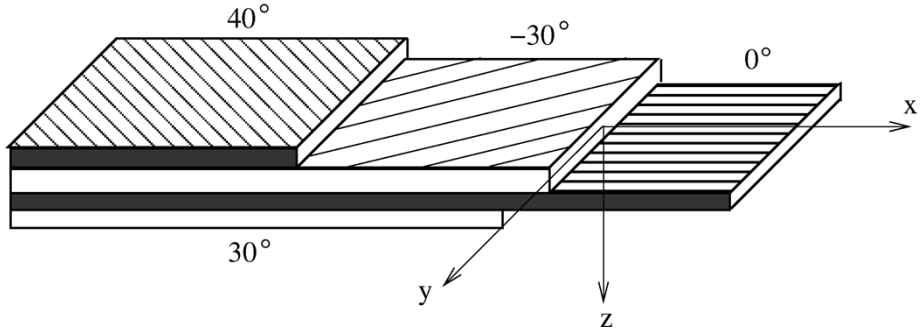
Porušení vláken a matrice

$$\mathbf{C}^{FM} = \begin{bmatrix} \theta & \theta & 0 \\ \theta & \theta & 0 \\ 0 & 0 & \theta \end{bmatrix}$$



Metoda postupného porušování

χ – degradační faktor



porušení vláken

$$\begin{bmatrix} \frac{v_m E_m}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{C}$ =

porušení matrice

$$\begin{bmatrix} C_{11} & \chi C_{12} & 0 \\ \chi C_{21} & \chi C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \chi C_{66} \end{bmatrix}$$

úplné porušení

$$\begin{bmatrix} \chi C_{11} & \chi C_{12} & 0 \\ \chi C_{21} & \chi C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \chi C_{66} \end{bmatrix}$$

Použitá literatura

[1] Berthelot, J. M.: Composite Materials. New York: Springer-Verlag, 1998, ISBN 9780387984261
[2] Deuschle, H.M.: 3D Failure Analysis of UD Fibre Reinforced Composites: Puck's Theory within FEA, dizertačni prace. Institute of Statics and Dynamics of Aerospace Structures University of Stuttgart, 2010.
[3] Krystek, J.: Pevnostni kriteria pro kompozitni materialy. Zapadočeska univerzita, Plzeň, 2012.
[4] Laš, V.: Mechanika kompozitnich materialů. Zapadočeska univerzita, Plzeň, 2. vydáni, 2008.
[5] Puck, A., Schurmann, H.: Failure Analysis of FRP Laminates by Means of Physically Based Phenomenological Models. Composites Science and Technology. 1998, Vol. 58, p. 1045-1067. ISSN 0266-3538.
[6] Lašová, Z.: Kritéria Direct Mode pro kompozitní materiály. Zapadočeska univerzita, Plzeň, 2014.
[7] Bek, L.: Kritérium porušení Puck pro dlouhovláknové kompozitní materiály. Zapadočeska univerzita, Plzeň, 2012
[8] Hashin, Z.: Failure Criteria for Unidirectional Fiber Composites. Journal of Applied Mechanics, 1980, Vol.47, pp. 329-334.

DĚKUJI ZA POZORNOST